

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PAUL THOUVENOT

**La convergence presque sûre des moyennes ergodiques
suivant certaines sous-suites d'entiers**

Séminaire N. Bourbaki, 1989-1990, exp. n° 719, p. 133-153.

http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__133_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1989-1990,
tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**LA CONVERGENCE PRESQUE SÛRE
DES MOYENNES ERGODIQUES
SUIVANT CERTAINES SOUS-SUITES D'ENTRIERS**
[d'après Jean Bourgain]

par Jean-Paul THOUVENOT

1. INTRODUCTION

Étant donné un système dynamique $(X, \mathcal{A}, m, T)$ où T est une bijection bimesurable préservant la mesure de l'espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, m)$, le théorème de Birkhoff dit que si $f \in L^1(X)$ alors $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^k x)$ converge p.s. quand $N \rightarrow +\infty$.

De nombreuses généralisations de ce résultat ont été données, notamment pour l'action de groupes plus généraux que $\mathbf{Z}$, ou pour des sous-suites des entiers de densité positive, avec des restrictions sur la nature de T (à spectre discret ou à spectre de Lebesgue, voir [B-K] et [B-L]). Mais on n'avait aucun exemple où le théorème était valable pour des sous-suites de densité supérieure nulle, notamment parce que les méthodes combinatoires utilisées sur les orbites pour établir le lemme maximal semblaient inadaptées à traiter cette situation. L'exemple le plus naturel à étudier dans ce cadre était la suite des carrés, car on savait, par la théorie spectrale, que si $f \in L^2$, $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{k^2} x)$ converge L^2 quand $N \rightarrow +\infty$. La question se trouve explicitement posée dans [B] et [F2].

Bourgain, dans [B 1], a démontré d'abord le lemme maximal dans la situation précédente en introduisant une technique absolument nouvelle, la transformation de Fourier sur le modèle des orbites. Il a ensuite, dans [B 3], produit par la même technique suffisamment de fonctions f pour lesquelles il y avait convergence p.s. (les fonctions L^∞) et a étendu ses résultats à la suite n^d , $d \geq 2$ et aux nombres premiers.

Pour la suite n^d , il a montré [B 2] ensuite la convergence *p.s.* pour des fonctions $f \in L^p$, $p > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Il a considérablement développé sa méthode jusqu'à lui donner la forme d'un outil capable de s'adapter au cas de différentes suites de type arithmétique. Il a prouvé en particulier dans [B 6]

THÉORÈME.— *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique et $p(n)$ un polynôme à coefficients entiers. Soit $r > 1$ et $f \in L^r(X)$. Alors*

*$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{p(k)}x)$ converge *p.s.* quand $N \rightarrow +\infty$. Le même résultat est valable si $p(n)$ désigne le n -ième nombre premier.*

(Le cas des nombres premiers pour $f \in L^r$, $r > 1$, avait été résolu auparavant dans [W].)

Nous donnons une présentation de son travail en nous restreignant cependant au cas $f \in L^2(X)$ et $p(n) = n^d$, $d \geq 2$ et nous indiquons comment traiter le cas des nombres premiers (Théorème 5 et Théorème 6).

Dans la partie 6, nous donnons une liste des autres résultats de Bourgain qui ressortissent de la même théorie.

1. L'INÉGALITÉ MAXIMALE

THÉORÈME 1.— *Soit d un entier ≥ 2 . Soit $f \in \ell^2(\mathbf{Z})$ et Mf défini par*

$$Mf(n) = \sup_{N > 0} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(n + k^d) \right|.$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\|Mf\|_2 \leq C\|f\|_2$$

(C ne dépend que de d).

THÉORÈME 2.— *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique. Soit $d \geq 2$. Soit $f \in L^2(X)$. Soit $f^*(x) = \sup_{N > 0} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{k^d}x) \right|$. Alors $\|f^*\|_2 \leq C\|f\|_2$. (C est exactement la constante du Théorème 1.)*

Démonstration du théorème 2 à partir du théorème 1 : Soit $\bar{N}$ un entier positif et

$$f_{\bar{N}}^*(x) = \sup_{\bar{N} \geq N > 0} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{k^d} x) \right|.$$

Il suffit de démontrer $\|f_{\bar{N}}^*\|_2 \leq C\|f\|_2$ (indépendamment de $\bar{N}$). Soit $J \gg \bar{N}$. Soit $x \in X$ et $\varphi_x \in \ell^2(\mathbf{Z})$ défini par $\varphi_x(n) = f(T^n x)$, $n \in [0, J]$, $\varphi_x(n) = 0$ si $n \notin [0, J]$. Alors si on définit $M_{\bar{N}} f(n) = \sup_{\bar{N} \geq N > 0} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(n+k^d) \right|$, $\|M_{\bar{N}} \varphi_x\|_2 \leq \|M \varphi_x\|_2 \leq C\|\varphi_x\|_2$ (d'après le Théorème 1), ce qui se lit :

$$\sum_{k=0}^{J-\bar{N}} \left| f_{\bar{N}}^*(T^k x) \right|^2 \leq C^2 \sum_{k=0}^J \left| f(T^k x) \right|^2$$

et en intégrant, comme T préserve la mesure,

$$(J - \bar{N})\|f_{\bar{N}}^*\|_2^2 \leq C^2 J\|f\|_2^2.$$

D'où le résultat puisque J peut être choisi arbitrairement grand.

Ce passage du modèle d'une seule orbite ($\mathbf{Z}$, le shift S) à une transformation apparaît dans [C]. L'inégalité maximale (le théorème 2) entraîne que pour tout système $(X, \mathcal{A}, m, T)$, l'ensemble des fonctions $f \in L^2(X)$ pour lesquelles il y a convergence presque sûre des sommes $S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{k^d} x)$ est fermé dans L^2 . Tandis que, pour les sommes de Birkhoff usuelles, il est facile de produire une classe dense de fonctions pour lesquelles on a convergence p.s., il n'y a aucune classe naturelle dans le cas des sommes $S_N f(x)$.

Cependant pour des transformations spécifiques, on a des classes denses naturelles : par exemple si T a un spectre de Lebesgue (les fonctions dont la densité spectrale est bornée), ou si T est isomorphe à une rotation irrationnelle (les fonctions continues).

2. SUFFISAMMENT DE FONCTIONS POUR LESQUELLES ON A UNE CONVERGENCE PRESQUE SÛRE

THÉORÈME 3.— Soit $f \in \ell^2(\mathbf{Z})$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $d \geq 2$. Posons $\mathbf{Z}_\varepsilon = [(1 + \varepsilon)^n]$, $n \in \mathbf{N}$ ([] désigne la partie entière). Soit N_j une suite d'entiers telle que $N_{j+1} > 2N_j$ et soit

$$M_j^\varepsilon f(n) = \sup_{\substack{N \in \mathbf{Z}_\varepsilon \\ N_j \leq N \leq N_{j+1}}} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(n + k^d) - \frac{1}{N_j} \sum_{\ell=1}^{N_j} f(n + \ell^d) \right|.$$

Alors $\sum_{1 \leq j \leq J} \|M_j^\varepsilon f\|_2 \leq A(J) \|f\|_2$ où $\frac{A(J)}{J}$ tend vers 0 avec une vitesse qui ne dépend que de ε (et pas de la suite N_j).

THÉORÈME 4.— Le théorème 3 entraîne que si $(X, \mathcal{A}, m, T)$ est un système dynamique et si $f \in L^\infty(X)$, alors

$$S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{k^d}(x)) \text{ converge p.s. quand } N \rightarrow +\infty.$$

Démonstration : Exactement la même démonstration que celle du théorème 2 dit que si on pose

$$M_j^\varepsilon f(x) = \sup_{\substack{N_j \leq N \leq N_{j+1} \\ N \in \mathbf{Z}_\varepsilon}} |S_N f(x) - S_{N_j} f(x)|$$

alors (1) $\frac{1}{J} \sum_{1 \leq j \leq J} \|M_j^\varepsilon f\|_2 \rightarrow 0$.

Mais si $S_N f$ ne converge pas p.s. suivant $\mathbf{Z}_\varepsilon$, il y a un nombre $a > 0$ et un ensemble E de X , $m(E) = a$, tels que $\overline{\lim}_{N \in \mathbf{Z}_\varepsilon} S_N f(x) - \underline{\lim}_{N \in \mathbf{Z}_\varepsilon} S_N f(x) > a$ pour tout x de E , et on peut alors choisir une suite N_j , satisfaisant $N_{j+1} \geq 2N_j$ telle que $\sup_{N_j < N \leq N_{j+1}} |S_N f(x) - S_{N_j} f(x)| > \frac{a}{2}$ pour tous les x d'une partie de E de mesure plus grande que $\frac{a}{2}$. Mais ceci contredit (1). Quand f est dans L^∞ , pour tout N , il existe N' dans $\mathbf{Z}_\varepsilon$ tel que $|S_N f(x) - S_{N'} f(x)| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty$ et par conséquent