

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRANCIS COMETS

Limites hydrodynamiques

Séminaire N. Bourbaki, 1990-1991, exp. n° 735, p. 167-192.

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__167_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LIMITES HYDRODYNAMIQUES

par Francis COMETS

On peut obtenir certaines équations de la mécanique des fluides à partir de systèmes de particules aléatoires évoluant selon une dynamique markovienne avec lois de conservation. Après renormalisation en espace et en temps (passage à la “limite hydrodynamique”), la mesure associée aux quantités conservées converge vers la solution d’une équation aux dérivées partielles non linéaire. Récemment, Guo, Papanicolaou et Varadhan ont proposé une méthode générale pour montrer la convergence, en utilisant des estimations *a priori* basées sur l’entropie (probabiliste) et la production d’entropie.

Cet exposé présente les idées générales en se limitant à la dynamique hors équilibre, certains développements à travers des exemples, et le schéma de la nouvelle méthode.

1. INTRODUCTION

L’idée selon laquelle les équations régissant un fluide à l’échelle macroscopique peuvent être obtenues à partir d’une dynamique microscopique n’est pas neuve. Par exemple, dans le cas d’une dynamique déterministe, Morrey tente dans [M] de déduire les équations d’Euler de la mécanique statistique, et Sinai formule une condition de validité dans [Si]. Nous considérerons ici des dynamiques aléatoires.

Parmi les systèmes dynamiques aléatoires, les modèles les plus étudiés S.M.F.

sont les systèmes de particules disposées sur un réseau, évoluant selon des échanges entre sites voisins avec lois de conservation (réseaux gazeux, modèle de Ginzburg-Landau,...). Ces systèmes de particules ont été introduits par Spitzer au début des années 70 ; Dobrushin fut le premier à remarquer quelques années plus tard qu'ils permettaient de reproduire des phénomènes hydrodynamiques et à étudier cette procédure de limite [DS].

À l'échelle microscopique, le système est localement à l'équilibre, d'après la loi des grands nombres ; les équilibres sont paramétrés par les valeurs moyennes des quantités (extensives) conservées. Ces paramètres diffèrent en général d'un point macroscopique à l'autre, et dans une échelle de temps bien choisie, ils évoluent selon une équation aux dérivées partielles non linéaire ; l'équation sera du premier ordre pour un système soumis à une force extérieure, à une source où un puits ("sink"), du second ordre pour un système invariant par retournement du temps. Même si le système admet une description autonome au niveau macroscopique, les deux niveaux ne sont pas indépendants : les équations possédant parfois plusieurs solutions, l'étude microscopique nous indique en général quelle est la solution signifiante.

La difficulté est que l'interaction (échange entre sites) de caractère local ne conduit pas directement à des équations closes, mais à une hiérarchie d'équations (hiérarchie BBGKY, des initiales de Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon) : typiquement, l'équation régissant le moment d'ordre 1 contient celui d'ordre 2, dont la propre équation contient celui d'ordre 3, etc.

Dans la partie II, nous décrivons les équations hydrodynamiques obtenues formellement à partir de la notion d'équilibre local utilisé comme un ansatz, pour clore la hiérarchie d'équations. Cette partie, plutôt heuristique et générale, nous a semblé indispensable à la compréhension du sujet. Ensuite, nous donnons des exemples de processus de saut attractifs ; puis nous présenterons la méthode de preuve de la production d'entropie pour le modèle de Ginzburg-Landau (§4), et enfin d'autres exemples et développements (§5). Nous n'abordons ici que la dynamique de non-équilibre, laissant de côté d'autres aspects importants comme les fluctuations à l'équilibre et loin de l'équilibre, le théorème de fluctuation-dissipation, ... Un point assez

complet sur le sujet est fait dans le gros article de synthèse de De Masi, Ianiro, Pellegrinotti et Presutti [DIPP], et dans celui — tout récent — de Spohn [Sp] consacré aux réseaux gazeux.

L'auteur remercie vivement C. Kipnis pour son aide durant la préparation de cet exposé.

2. LIMITES HYDRODYNAMIQUES : GÉNÉRALITÉS

2.1. Modèle aléatoire

Considérons des variables aléatoires $Y = (Y(i))_{i \in \mathbf{L}}$ à valeurs entières ou réelles indexées par un réseau $\mathbf{L}$. $\mathbf{L}$ pourra être le réseau $\mathbf{Z}^d$ de dimension d , ou au §4, le réseau torique $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ avec N grand ; $Y(i)$ représente une quantité algébrique de charges, le nombre de molécules au point i , la présence ou l'absence d'une particule en i (réseaux gazeux, $Y(i) \in \{0, 1\}$), ...

La configuration Y évolue au cours du temps selon un processus de Markov homogène dans le temps de générateur $\mathcal{L} = \sum_{i,i'} \mathcal{L}_{i,i'}$ invariant par translation, avec $\mathcal{L}_{i,i'} f = 0$ pour toute fonction test f ne dépendant pas de $(y(i), y(i'))$. Nous supposons pour la simplicité de cet exposé que les échanges ne s'effectuent qu'entre sites plus proches voisins, de sorte que la somme ne porte que sur les paires de points i, i' à distance 1. Nous supposons aussi que la masse totale, formellement $\sum_i y(i)$, est la seule quantité conservée par le semi-groupe de générateur $\mathcal{L}$. Si E est un espace topologique, notons $\mathcal{M}(E)$ [resp., $\mathcal{M}_1^+(E)$] l'ensemble des mesures de Radon [resp., de probabilité] sur la tribu borélienne de E .

Un ingrédient essentiel au comportement hydrodynamique est l'existence, liée à la loi de conservation, d'une famille paramétrique $\nu_\rho \in \mathcal{M}_1^+(\mathbf{R}^{\mathbf{L}})$, $\rho \in I$ intervalle réel, de mesures de probabilité invariantes par le semi-groupe, qui soient invariantes par translation et ergodiques (analogue des Maxwelliennes). Sous cette hypothèse, on choisira le paramétrage comme la valeur moyenne de la quantité conservée

$$(1) \quad \rho = \mathbf{E}^{\nu_\rho} Y(i).$$

Ces mesures ν_ρ diffèrent l'une de l'autre par la valeur de leur potentiel chimique, variable duale de y .

Soit ε un paramètre de renormalisation en espace, que l'on fera tendre vers 0 ; dans le cas du tore, $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Les échanges étant locaux, il faut accélérer le temps par un facteur $1/a(\varepsilon)$ avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\varepsilon) = 0$; les variables d'espace et de temps i, u au niveau microscopique seront notées $x = \varepsilon i$, $t = a(\varepsilon)u$ au niveau macroscopique. La distribution initiale P_0^ε dépendra de ε ; soit P^ε la loi du processus de générateur $\mathcal{L}$ sur l'espace des trajectoires, et $P_u^\varepsilon = \exp(u\mathcal{L}^*) P_0^\varepsilon$ sa marginale à l'instant u . Notons enfin $\mathcal{T}^i$ la translation du vecteur i sur l'espace des configurations ($\mathcal{T}^i y(i') = y(i + i')$ pour tout $i' \in \mathbf{L}$).

2.2. Équilibre local

DÉFINITIONS.— 1) *La distribution initiale satisfait à l'équilibre local si*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, P_0^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[x/\varepsilon]} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{et.}} \nu_{\rho_0(x)}$$

pour une fonction régulière ρ_0 ; ρ_0 s'appelle le profil d'équilibre local ($\xrightarrow{\text{et.}}$ désigne la convergence étroite des mesures de probabilité).

2) *il y a alors conservation de l'équilibre local si il existe une fonction régulière $\rho(t, x)$ telle que*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \forall t \geq 0, P_{t/a(\varepsilon)}^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[x/\varepsilon]} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{et.}} \nu_{\rho(t, x)}.$$

La définition 1 signifie que le système se trouve, au voisinage du site microscopique $i = x/\varepsilon$, dans l'état d'équilibre dicté par la moyenne locale de la quantité conservée. On peut obtenir des distributions d'équilibre local en imposant un "équilibre" avec potentiel chimique variant lentement dans l'espace des sites : lorsque les ν_ρ sont des mesures produits, un exemple simple est $\otimes_{i \in \mathbf{Z}^d} \nu_{\rho_0(\varepsilon i)}(dy(i))$. La définition 2 signifie quant à elle que la valeur moyenne de Y évolue lentement (à cause du caractère local des échanges), et que sur des intervalles de temps longs, l'ergodicité entraîne localement le système vers l'équilibre possédant cette valeur moyenne. Les systèmes possédant une limite hydrodynamique conservent en général l'équilibre local ; nous rencontrerons deux exceptions, celle de la courbe de choc (§3.5) et celle de la transition de phase (§4.4).