CLAUDE ZUILY

Solutions en grand temps d’équations d’ondes non linéaires

Séminaire N. Bourbaki, 1993-1994, exp. nº 779, p. 107-144.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__107_0>

Séminaire BOURBAKI
46ème année, 1993-94, n° 779

Novembre 1993

SOLUTIONS EN GRAND TEMPS D'ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES

par **Claude ZUILY**

L'équation des ondes est sans conteste l'une des plus importantes équations aux dérivées partielles. Elle sert de modèle à la théorie générale des équations hyperboliques et ses applications en physique théorique sont multiples. De très nombreux travaux lui ont été consacrés depuis plus de deux siècles et encore aujourd'hui elle est l'objet de recherches très actives dans ses versions linéaire et non linéaire.

La question de l'existence de solutions pour le problème de Cauchy est centrale dans sa théorie. Dans le cas non linéaire, l'existence d'une solution pour des temps petits est en principe acquise (au moins pour des données assez régulières). Dès lors se pose le problème de l'évolution de cette solution. Existe-elle pour tout temps? Sinon peut-on déterminer son temps de vie, décrire l'ensemble de ses singularités, connaître son comportement au voisinage de cet ensemble? etc ... Autant de questions qui dans la plupart des cas sont encore largement ouvertes. Cependant il est au moins deux cas où des réponses profondes à certaines de ces questions ont été données. Le premier est celui où les données sont petites, le second celui des équations d'ondes semi-linéaires dispersives. L'objet de cet exposé est de rendre compte des progrès récents dans ces deux domaines. En particulier nous détaillerons la preuve d'un résultat de J. Shatah et M. Struwe qui traite des équations dispersives avec puissance critique.

Pour la rédaction de la première partie de ce texte nous avons bénéficié des excellentes notes de L. Hörmander [Ho4] auxquelles le lecteur intéressé est vivement invité à se référer. Concernant les équations dispersives nous renvoyons aux récents survols de W. Strauss [St4] et M. Struwe [Stru2] pour les résultats antérieurs.

0. PRELIMINAIRES

0.1. Notations

On notera dans ce qui suit x_0 et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les variables de temps et d'espace ; on supposera $x_0 \geq 0$, le cas des temps négatifs étant ici analogue. Pour $u \in C^1$ on notera $u' = (\partial_j u)_{j=0,\dots,n}$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

L'opérateur des ondes $\square$ est défini par

$$\square = \partial_0^2 - \Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 . \tag{0.1}$$

C'est le modèle des opérateurs différentiels du second ordre strictement hyperboliques par rapport aux surfaces x_0 =constante.

Il sera commode, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, de supposer que toutes les fonctions considérées ici — coefficients, données, solutions ... — sont à valeurs réelles.

Nous étudierons le problème de Cauchy pour des équations du second ordre strictement hyperboliques quasi-linéaires. Les éventuelles extensions à des cas complètement non linéaires seront discutées dans les commentaires. Il s'agira de résoudre le problème :

$$\partial_0^2 u - \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk}(u, u') \partial_j \partial_k u = f(u, u') \tag{0.2}$$

$$u(0, x) = u_0(x) , \quad \partial_0 u(0, x) = u_1(x) . \tag{0.3}$$

Les fonctions a_{jk}, f, u_0, u_1 sont des données. On supposera que les a_{jk} et f sont C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. La régularité des données initiales u_0, u_1 sera, quant à elle, précisée dans les énoncés. On supposera d'autre part

$$a_{00} \equiv 0 , \quad f(0,0) = 0 \tag{0.4}$$

et, ce qui ne restreint pas la généralité du problème,

$$\square = \partial_0^2 - \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk}(0,0) \partial_j \partial_k . \tag{0.5}$$

L'hyperbolicité de l'équation (0.2) se traduira dans le fait que les solutions éventuelles se devront de vérifier, sur leur domaine de définition D la condition

$$(0.6) \quad E^{\times} C_0 > 0 \quad \text{tq} \quad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u,u')\xi_j\xi_k \geq C_0|\xi|^2, \quad \forall (x_0,x) \in D, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Les solutions de classe C^2 du problème (0.2), (0.3) sont appelées solutions classiques. Dans certains cas il peut exister des solutions à régularité plus faible, cependant, à part quelques allusions au § 2, nous n'aborderons pas ici ce problème.

Nous aurons à utiliser les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que si $s > \frac{n}{2} + k$, où $k \in \mathbb{N}$, cet espace s'injecte dans celui des fonctions k fois différentiables dont les dérivées d'ordre au plus k tendent vers zéro à l'infini.

0.2. Existence en temps petit de solutions classiques

Le résultat suivant, qui assure, sous des conditions assez générales, l'existence locale en temps, est classique (cf. [Ka1], [Ho4]).

Théorème 0.1. – *Soient s un entier, $s > \frac{n}{2}+2$, et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Posons $v_0 = (u_1, u_0')$ et supposons*

(0.7)

$$E^{\times} C_0 > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u_0,v_0)\xi_j\xi_k \geq C_0|\xi|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Il existe alors $T > 0$ et une unique solution classique u sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ du problème (0.2), (0.3) telle que $\partial_0^j u \in C^0([0,T], H^{s-j}(\mathbb{R}^n))$, $0 \leq j \leq 2$.

Schéma de la preuve

On utilise un procédé itératif d'approximation. L'existence à chaque étape d'une solution approchée utilise la *théorie hyperbolique linéaire*, la convergence est montrée à l'aide de *l'inégalité d'énergie* et des *estimations des fonctions non linéaires* dans les espaces de Sobolev.

L'inégalité d'énergie

Elle concerne les solutions d'équations hyperboliques linéaires. Plus précisément soit u une solution classique de l'équation linéaire

(0.8) $$\partial_0^2 u - \sum_{j,k=0}^{n} \gamma_{jk}\partial_j\partial_k u = g\,, \quad 0 \leq x_0 \leq T\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

où $\gamma_{0,0} \equiv 0$, $\partial^\alpha \gamma_{jk} \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ pour $|\alpha| \leq 1$ et $j,k = 0,\ldots,n$, $f \in L^\infty([0,T], L^2)$ et

(0.9)
$$E^\times\, \alpha > 0, \beta > 0 \,:\, \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk}\xi_j\xi_k \leq \beta|\xi|^2, \quad \forall (x_0, x, \xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Supposons que pour $x_0 \in [0,T]$, $u(x_0,x) = 0$ pour $|x|$ assez grand. Alors

(0.10)
$$\begin{cases} \text{Il existe } C_1 > 0, C_2 > 0 \text{ ne dépendant que de } n, \alpha, \beta \text{ telles que} \\ ||u'(x_0,\cdot)||_{L^2} \leq C_1\Big(||u'(0,\cdot)||_{L^2} + \int_0^{x_0} ||g(\tau,\cdot)||_{L^2}\,d\tau\Big) \exp\Big(C_2 \int_0^{x_0} |\gamma'(\tau)|d\tau\Big) \end{cases}$$

où

(0.11) $$|\gamma'(\tau)| = \sum_{i,j,k=0}^{n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_i \gamma_{jk}(\tau,x)|\,.$$

Estimation des fonctions non linéaires

Soient $U \in (H^s(\mathbb{R}^n))^N$, $N \geq 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s > \frac{n}{2}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $f(0) = 0$. Alors $f(U) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et

(0.12) $$||f(U)||_s \leq C(f, ||U||_{L^\infty})||U||_s$$

où $C(f, ||U||_{L^\infty}) = \sup\limits_{\substack{1 \leq j \leq s \\ |t| \leq ||U||_{L^\infty}}} |\partial^j f(t)|||U||_{L^\infty}^{j-1}$.

Le point capital ici est que le membre de droite de l'inégalité (0.12) croît linéairement avec $||U||_s$.