

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHÈLE AUDIN

Cohomologie quantique

Séminaire N. Bourbaki, 1995-1996, exp. n° 806, p. 29-58.

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__29_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__29_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1995-1996,
tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE QUANTIQUE

par Michèle AUDIN

A la mémoire de Claude Itzykson

Les personnages principaux de cet exposé sont des invariants (dits de *Gromov-Witten*, mais construits, dans la plus grande généralité, par Ruan et Tian [51]) pour les variétés symplectiques, définis à l'aide des espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes.

Ces espaces de modules ont été introduits et utilisés par Gromov en 1985 dans un article célèbre [28], notamment pour distinguer des variétés symplectiques, puis par McDuff en 1990 dans [43]¹ pour classifier certaines variétés symplectiques de dimension 4. Plus récemment, certains des invariants numériques qu'ils permettent de définir ont servi à Ruan [50] pour distinguer les classes de déformation de deux variétés kählériennes difféomorphes et Taubes en a relié d'autres aux invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques de dimension 4 pour démontrer une suite de résultats spectaculaires [54] (voir aussi [36]) dont l'unicité de la structure symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Si l'on en croit les physiciens, ces invariants symplectiques seraient utiles pour décrire les fonctions de corrélation en théorie topologique des champs. A ce titre, ils devraient satisfaire un axiome fondamental, la *règle de décomposition* (en anglais *composition law*) qui décrit le comportement de ces fonctions quand la surface de Riemann dégénère sur une surface singulière, et Ruan et Tian démontrent que c'est bien le cas.

En se restreignant aux courbes pseudo-holomorphes de genre 0 (c'est à dire aux sphères, dites *courbes rationnelles*), comme une sphère ne peut dégénérer que sur une réunion de sphères (le genre n'augmente pas), cette règle de décomposition permet de construire un produit *associatif* — dit *produit quantique* — sur la cohomologie de certaines variétés symplectiques, qui tient compte, grâce aux invariants de Gromov-Witten, de toutes les courbes rationnelles qu'elles contiennent — se restreindre aux courbes rationnelles constantes donnant le cup-produit usuel.

Dans cet exposé, je vais décrire assez de la construction des invariants pour pouvoir donner des énoncés précis sur le produit quantique et le calculer dans quelques exemples.

¹Voir aussi la conclusion récente de ce travail, en collaboration avec Lalonde, dans [37].

Au § 1, je décrirai les invariants et ce qu'il faut démontrer pour les définir, ainsi que les règles de décomposition qu'ils satisfont. Au § 2, je donnerai des indications sur les démonstrations et au § 3 je définirai le produit quantique, donnerai certaines de ses propriétés ainsi que quelques exemples de calculs. Je terminerai par une liste d'allusions à des questions connexes (symétrie miroir et variétés de Frobenius notamment).

J'ai choisi d'axer ce texte sur les invariants "symplectiques" tels qu'ils sont définis par Ruan et Tian dans [51], mais j'ai utilisé au maximum les explications contenues dans le livre [45] de McDuff et Salamon. Il existe des approches algébro-géométriques (la plus féconde sans doute via les "application stables" de Kontsevich [33], voir aussi [11, 12, 15, 38]), mais je n'en parlerai pas. Pour une approche complémentaire, on se reportera aux notes [23] de Fulton et Pandharipande.

Actualisation (septembre 1996). — Depuis la présentation orale et la première version de ce texte en novembre 1995, différents auteurs ont annoncé des améliorations significatives de certains des résultats qu'il expose.

Il s'agit principalement de la démonstration par Givental de la conjecture des miroirs ([26], voir le § 3.3.3) et de la définition des invariants de Gromov-Witten pour toutes les variétés symplectiques (suppression des hypothèses de monotonie décrites ici dans les définitions 1.1.5 ou 1.1.3) notamment par Li et Tian [39], Behrend et Fantechi [9, 10] dans le cadre algébro-géométrique et par Fukaya et Ono [22] et Siebert [52] dans le cadre symplectique. Ces derniers auteurs raffinent sérieusement les méthodes présentées ici au § 2 pour se débarrasser des problèmes évoqués avant la définition 1.1.3.

En plus de cette note d'actualisation, le présent texte diffère de celui distribué en novembre 1995 par la mise à jour de la bibliographie et la correction de certaines des erreurs qu'il contenait.

Remerciements. — Je remercie les nombreuses personnes qui m'ont aidée et notamment Dusa McDuff, Jean-Yves Mérindol, Claude Sabbah et Claire Voisin aux conseils et suggestions desquels la mise au point de ce texte doit beaucoup, ainsi qu'O. Gabber et H. Spielberg pour m'avoir signalé des erreurs dans sa première version.

1. Les invariants de Gromov-Witten

On considère ici une variété symplectique (X, ω) et l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque complexes adaptées à la forme symplectique. Rappelons qu'une *structure presque complexe* sur une variété X est une structure de fibré vectoriel complexe sur son fibré tangent, en symboles un champ J d'endomorphismes

$$J_x : T_x X \longrightarrow T_x X \text{ tels que } J_x^2 = -\text{Id} \quad \forall x \in X$$

et qu'elle est *adaptée* à une 2-forme non dégénérée ω si la forme bilinéaire $(\xi, \eta) \mapsto \omega(\xi, J\eta)$ est symétrique définie positive (bref, une métrique riemannienne).

Toute variété presque complexe a des classes de Chern (celles du fibré vectoriel complexe (TX, J)). En particulier, comme l'ensemble des structures presque complexes adaptées à une forme symplectique est contractile², donc connexe, une variété symplectique a des classes de Chern — ne dépendant pas de la structure presque complexe adaptée choisie.

Une des qualités des variétés presque complexes est que, à défaut de fonctions holomorphes³, elles possèdent localement beaucoup de *courbes* holomorphes⁴. Si Σ est une surface de Riemann (sa structure complexe j est fixée), une application $u : \Sigma \rightarrow X$ est dite *J-holomorphe* si son application tangente est linéaire sur $\mathbf{C}$, c'est à dire si

$$(1) \quad T_x u \circ j(\xi) = J \circ T_x u(\xi), \quad \forall x \in \Sigma, \quad \forall \xi \in T_x \Sigma.$$

1.1. Définition des invariants

On choisit sur X une structure presque complexe J adaptée à ω . Les invariants définis par Ruan et Tian dans [51] sont des homomorphismes

$$\Psi_{g,k,\ell}^A : H_* (X^{k+\ell}; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

Dans cette écriture,

- l'exposant A est une classe d'homologie, $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$,
- l'indice g est le genre d'une surface de Riemann Σ ,
- celle-ci est équipée d'un k -uplet de points marqués distincts $\vec{z} = (z_1, \dots, z_k)$ (on suppose $2g + k \geq 3$),
- le dernier indice est un entier, $\ell \in \mathbf{N}$.

L'idée, proche de celle utilisée par Donaldson ([18]) pour définir ses polynômes, est la suivante : étant données des classes d'homologie $a_1, \dots, a_k$ et $b_1, \dots, b_\ell \in H_*(X; \mathbf{Z})$ (représentées par des cycles auxquels je donne le même nom), l'image de $a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_\ell$, notée $\Psi_{g,k,\ell}^A(a_1 \otimes \dots \otimes a_k | b_1 \otimes \dots \otimes b_\ell)$ va compter toutes les *applications J-holomorphes* $u : \Sigma \rightarrow X$ qui représentent la classe A (c'est à dire telles que $u_*[\Sigma] = A \in H_2(X; \mathbf{Z})$), qui envoient les k points marqués dans $a_1, \dots, a_k$ et qui coupent $b_1, \dots, b_\ell$ (voir la figure 1).

Remarque. — Les “courbes” *J-holomorphes* dont il est question ici sont bien des applications $\Sigma \rightarrow X$, c'est à dire des courbes *paramétrées*. On pourrait aussi, mais je ne le ferai pas ici, admettre moins, ou pas, de points marqués (c'est à dire oublier la condition $2g + k \geq 3$) et quotienter par l'opération du groupe de reparamétrages. Le lien entre paramétrage, points marqués et courbe image devrait être clarifié par l'exemple suivant.

²Simplement parce que le groupe symplectique $Sp(2n; \mathbf{R})$ se rétracte sur le groupe unitaire $U(n)$, qui est sa composante compacte (voir par exemple [3]).

³Il n'y a en général pas de fonctions holomorphes, même localement : s'il y avait assez de fonctions holomorphes, on pourrait en faire des cartes analytiques et J serait *intégrable*.

⁴Une référence commode et assez complète pour les propriétés des courbes holomorphes dans les variétés symplectiques et presque complexes est le livre [4], que je cite donc systématiquement.

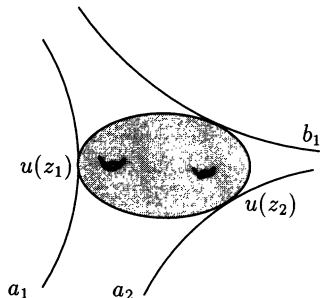


Figure 1

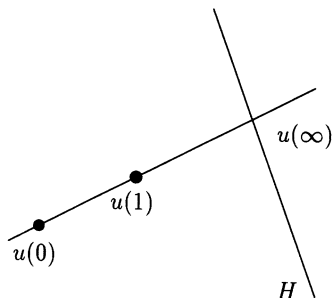


Figure 2

1.1.1. *Exemple.* — Prenons pour X l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$, avec sa forme de Kähler et sa structure complexe usuelles, et pour A le générateur de $H_2(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z})$ (la classe des droites projectives). Soit $H \in H_{2(n-1)}(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z})$ la classe des hyperplans.

L'invariant $\Psi_{0,3,0}^A(\text{pt} \otimes \text{pt} \otimes H)$ devrait compter les courbes rationnelles ($g = 0$) paramétrées de la classe A (c'est à dire les droites paramétrées), contraintes à passer par deux points donnés et à rencontrer un hyperplan fixé. Les deux points déterminent la droite (image) et son point de rencontre avec l'hyperplan, ces trois points ensemble fixent enfin le paramétrage (figure 2). L'invariant $\Psi_{0,3,0}^A$, une fois défini, devrait donner

$$\Psi_{0,3,0}^A(\text{pt} \otimes \text{pt} \otimes H) = 1$$

dans cet exemple.

Plus précisément, on considère l'espace $\mathcal{M}_g^A(J)$ des applications J -holomorphes $u : \Sigma \rightarrow X$ telles que $u_*[\Sigma] = A$ et l'application d'évaluation $\text{ev}_{\bar{z},\ell} :$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_g^A(J) \times \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{\ell \text{ fois}} &\longrightarrow \underbrace{X \times \cdots \times X}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{\ell \text{ fois}} \\ (u, \quad \zeta_1, \dots, \zeta_\ell) &\longmapsto (u(z_1), \dots, u(z_k), \quad u(\zeta_1), \dots, u(\zeta_\ell)). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{M}_g^A(J)$ était une variété compacte orientée, elle porterait une classe fondamentale et on pourrait définir $\Psi_{g,k,\ell}^A(a)$ comme le nombre d'intersection

$$\Psi_{g,k,\ell}^A(a) = (\text{ev}_{\bar{z},\ell})_* \left([\mathcal{M}_g^A(J) \times \Sigma^\ell] \right) \cdot a \text{ pour } a \in H_* \left(X^{k+\ell}; \mathbf{Z} \right).$$

Que l'espace de modules $\mathcal{M}_g^A(J)$ soit une variété pour une structure presque complexe J assez générale ne pose pas de gros problème, à condition toutefois de se restreindre aux courbes *simples* (celles qui ne se factorisent pas par des revêtements multiples, voir le § 2.1). Le prototype des énoncés de régularité est le suivant (voir [45]) :

1.1.2 PROPOSITION. — Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$ et soit $c_1 \in H^2(X; \mathbf{Z})$ sa première classe de Chern. Il existe une partie $\mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$ dans l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque complexes adaptées à ω , qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses et telle que