PIERRE PANSU

Volume, courbure et entropie

Séminaire N. Bourbaki, 1996-1997, exp. n^o 823, p. 83-103.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__83_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1996
49ème année, 1996-97, n° 823

VOLUME, COURBURE ET ENTROPIE
[d'après G. Besson, G. Courtois et S. Gallot]

par **Pierre PANSU**

1. INTRODUCTION

1.1. Parmi toutes les métriques riemanniennes sur une variété compacte X dont la courbure sectionnelle varie entre -1 et 1, laquelle a le plus petit volume ? C'est M. Gromov qui, dans les années 1970, a révélé quelles richesses se cachent derrière cette question d'apparence anodine.

On appelle *volume minimal* de X, noté $\mathrm{MinVol}(X)$ la borne inférieure des volumes des métriques riemanniennes sur X dont la courbure varie entre -1 et 1.

Lorsque X est de dimension 2, son volume minimal est donné par

$$\mathrm{MinVol}(X) = |2\pi\chi(X)|$$

où $\chi(X)$ désigne la caractéristique d'Euler. Si $\chi(X) \neq 0$, le minimum est atteint exactement par les métriques à courbure constante égale à 1 ou -1 suivant le signe de la caractéristique d'Euler. Cela résulte immédiatement de la formule de Gauss-Bonnet. Lorsque $\chi(X) = 0$, la borne inférieure n'est pas atteinte, mais approchée par exemple par des métriques à courbure nulle.

En dimension paire supérieure à 2, la formule de Gauss-Bonnet a une généralisation, due à Allendoerfer et Weil, qui permet d'estimer le volume en fonction de la caractéristique d'Euler et de la courbure sectionnelle. Toutefois, cette inégalité n'est pas optimale et on ne connaît pas la valeur du volume minimal de la 4-sphère (voir cependant [V]). En fait jusqu'aux travaux récents de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, le volume minimal n'était connu exactement pour aucune variété de dimension au moins 3 (à moins qu'il soit nul).

THÉORÈME 1 [BCG2].– *Soit X une variété compacte de dimension au moins 3. Supposons que X admette une métrique riemannienne g_0 à courbure sectionnelle constante égale à -1. Soit g une métrique riemannienne sur X dont la courbure sectionnelle est partout ≥ -1. Alors $\mathrm{Vol}(X,g) \geq \mathrm{Vol}(X,g_0)$ et l'égalité n'a lieu que si g est isométrique à g_0.*

Cet énoncé entraîne que g_0 est la seule métrique à courbure sectionnelle -1 sur X (à isométrie près). C'est le théorème de rigidité de G.D. Mostow, [M1].

La preuve consiste à construire une application homotope à l'identité qui diminue les volumes. On peut l'interpréter comme une version réelle du Lemme de Schwarz qui ne s'appliquerait qu'à des métriques g_0 très particulières (modelées sur les espaces symétriques à courbure strictement négative, voir en 3.1). L'hypothèse sur la courbure sectionnelle de g n'intervient qu'à travers une majoration asymptotique du volume des boules.

1.2. Définition. Soit (X,g) une variété riemannienne compacte de revêtement universel $\tilde{X}$. Si $\tilde{x} \in \tilde{X}$, on note $B(\tilde{x},R)$ la boule géodésique de centre $\tilde{x}$ et de rayon R dans $\tilde{X}$. Alors la limite

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{Vol}\, B(\tilde{x},R)$$

existe et ne dépend pas du choix de $\tilde{x}$. On l'appelle l'*entropie volumique* de la métrique g, et on la note $h_{vol}(g)$.

Le théorème 1 résulte immédiatement de la propriété isopérimétrique suivante, conjecturée par M. Gromov et A. Katok, qui a des conséquences très diverses.

THÉORÈME 2 [BCG2].– *Soient X et Y deux variétés compactes orientées de même dimension $n \geq 3$. On suppose que X admet une métrique riemannienne localement symétrique g_0 de courbure strictement négative. Soit g une métrique riemannienne sur Y dont l'entropie volumique est égale à celle de g_0 (on peut toujours se ramener à ce cas en multipliant g par une constante). Soit $f : Y \to X$ une application de degré d. Alors*

$$(*) \qquad \mathrm{Vol}(g) \geq |d| \mathrm{Vol}(g_0).$$

Si l'égalité a lieu, alors f est homotope à un revêtement isométrique.

D'après A. Katok [K], en dimension 2, sous les mêmes hypothèses, l'inégalité (*) est vraie, et en cas d'égalité la métrique g est elle-même à courbure constante.

Ce théorème affine un résultat de M. Gromov qui a obtenu, dès la fin des années 70, l'inégalité (*) à une constante multiplicative près. Le théorème de M. Gromov est plus général. Il s'applique à des variétés quelconques. Le volume hyperbolique est remplacé par une sorte de volume topologique, le *volume simplicial*. Le théorème affiné repose sur des idées simples qui auront sans doute d'autres applications en géométrie riemannienne. La caractérisation de certains espaces localement symétriques fournie par le cas d'égalité a d'ores et déjà des conséquences en géométrie et au-delà.

1.3. Organisation du texte. Les premiers paragraphes rendent brièvement compte de l'approche de M. Gromov. Ensuite, on décrit quelques aspects de la preuve du théorème 2. Enfin, on en explique les conséquences pour une série de problèmes qui mêlent dynamique et géométrie.

2. VOLUME SIMPLICIAL

Le théorème 1 entraîne que, lorsqu'une métrique à courbure -1 existe, son volume est un invariant différentiable. En fait, on sait depuis [G], [T] exprimer ce nombre de façon purement topologique.

2.1. Définition (M. Gromov). Soit X une variété compacte orientée. Sur le complexe des chaînes singulières à coefficients réels, on a une norme L^1 naturelle,

$$\|\sum \lambda_j \sigma_j\| = \sum |\lambda_j|.$$

On note de la même façon la semi-norme quotient sur l'homologie réelle. On appelle *volume simplicial* de X, et on note $\|X\|$ la norme de la classe fondamentale en homologie réelle.

Le volume simplicial fait penser au nombre minimum de simplexes d'une triangulation. Il s'en distingue, car, comme on travaille en homologie réelle, on a le droit par exemple de couvrir la variété deux fois en comptant chaque simplexe avec le coefficient $\frac{1}{2}$. Plus généralement,

- s'il existe une application $f : Y \to X$ de degré d, alors $\|Y\| \geq |d|\|X\|$.

En particulier, si X admet des applications dans elle-même de degré $\neq -1,\ 0,\ 1$, alors $\|X\| = 0$. Le volume simplicial est donc nul pour les sphères et les tores. En revanche, il est non nul pour les variétés à courbure sectionnelle négative.

2.2 THÉORÈME [T].– *Soit X une variété riemannienne de courbure sectionnelle $K = -1$, de dimension n, i.e., dont le revêtement universel est isométrique à l'espace hyperbolique H^n. Alors*

$$\mathrm{Vol}(X) = R_n \|X\|$$

où R_n est le volume d'un simplexe idéal régulier de H^n.

La constante R_n est la borne supérieure des volumes de tous les simplexes rectilignes de H^n. Étant donnés $n+1$ points $x_0, \ldots, x_n$ de l'espace hyperbolique H^n, le simplexe rectiligne de sommets $x_0, \ldots, x_n$ est l'application qui envoie le point du simplexe standard de coordonnées barycentriques $p_0, \cdots, p_n$ sur le barycentre de la mesure atomique $\sum p_i \delta_{x_i}$, i.e. le point où la fonction $x \mapsto \sum p_i \mathrm{dist}(x, x_i)$ atteint son minimum.

Il faut penser à H^n comme à l'intérieur d'une boule, équipé d'une métrique qui explose au bord. Lorsqu'on fait tendre ses sommets vers des points du bord, un simplexe rectiligne de H^n converge vers un simplexe dit *idéal*. U. Haagerup et M. Munkholm [HM] ont montré que R_n est le volume du simplexe idéal *régulier*, i.e. le plus symétrique.

La preuve de l'inégalité $\mathrm{Vol}(X) \leq R_n \|X\|$, attribuée à W. Thurston, consiste à *rectifier* les simplexes de X. Redresser un simplexe singulier de X, c'est le relever à H^n, le remplacer par le simplexe rectiligne de mêmes sommets, qu'on projette dans X. Cette opération induit l'identité en homologie et montre que $\mathrm{Vol}(X) \leq R_n \|X\|$.

La preuve de l'inégalité inverse $\mathrm{Vol}(X) \geq R_n \|X\|$, due à M. Gromov, consiste à trianguler X par des simplexes idéaux réguliers. C'est possible en dimension 2, mais seulement rarement en dimensions supérieures. Cependant, si on admet des simplexes idéaux et des combinaisons de tels simplexes à coefficients mesures dans les calculs d'homologie singulière, alors la classe fondamentale de X est représentée par la chaîne *étalée* c suivante. On fixe un simplexe idéal régulier σ. Normalisons la mesure de Haar sur le groupe des isométries de H^n de sorte que la mesure de l'ensemble des isométries qui envoient un point fixé dans σ soit 1. Si γ est une isométrie de H^n, on note signe(γ) son effet sur l'orientation. On pose $c = \int \mathrm{signe}(\gamma)\pi(\gamma\sigma)\, d\gamma$ où on intègre sur l'espace compact $Isom(H^n)/\pi_1(X)$. Alors la norme L^1 de c est exactement $(R_n)^{-1}\mathrm{Vol}(X)$.

2.3. Rigidité à la Mostow, d'après M. Gromov. Soient X, Y des variétés compactes de dimension $n \geq 3$ revêtues par l'espace hyperbolique H^n. On va montrer que toute équivalence d'homotopie $f : Y \to X$ est homotope à une isométrie. Les groupes $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ agissent par isométries sur H^n et par transformations conformes sur le bord ∂H^n de la boule. Une orbite de $\pi_1(X)$ (resp. $\pi_1(Y)$) dans H^n est un ensemble discret qui s'accumule en tout point du bord. Une équivalence d'homotopie $f : Y \to X$ induit une bijection entre ces ensembles discrets.

2.4 FAIT .– *Toute équivalence d'homotopie $f : Y \to X$ se relève à H^n, et se prolonge par continuité en un homéomorphisme ∂f du bord de la boule.*