SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ÉLISABETH BOUSCAREN

Théorie des modèles et conjecture de Manin-Mumford

Séminaire N. Bourbaki, 1999-2000, exp. n° 870, p. 137-159.
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1999-2000__42__137_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1999-2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
52e année, 1999-2000, n° 870, p. 137 à 159

Mars 2000

THÉORIE DES MODÈLES ET CONJECTURE DE MANIN-MUMFORD [d'après Ehud Hrushovski]

par **Élisabeth BOUSCAREN**

1. INTRODUCTION

Je vais présenter ici l'une des applications récentes de la théorie des modèles à la géométrie diophantienne, la nouvelle démonstration, due à E. Hrushovski ([Hr2]), de la conjecture de Manin-Mumford (généralisée) qui est basée sur l'étude, du point de vue de la théorie des modèles, des corps algébriquement clos munis d'un automorphisme.

THÉORÈME 1.1 (Conjecture de Manin-Mumford). — *Soit G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur un corps de nombres k et X une sous-variété de G. Alors il y a un nombre fini de points de torsion de G, $a_1, \ldots, a_M$, et de sous-groupes algébriques de G, $G_1, \ldots, G_M$ tels que pour chaque i, $a_i + G_i$ est contenu dans X et*

$$X(k^{alg}) \cap Tor(G) = \bigcup_{i=1}^{M} a_i + Tor(G_i).$$

De plus on peut borner de façon effective le nombre M de translatés : il existe c, e deux constantes ne dépendant que d'invariants liés à G (et non à X) et du choix de deux premiers de bonne réduction pour G, tels que $M \leq c \deg(X)^e$.

En utilisant des méthodes de calcul assez grossières, on obtient que les constantes c et e sont doublement exponentielles.

La démonstration de Hrushovski passe par une première étape où il prend un premier de bonne réduction pour G, de caractéristique résiduelle p, et montre le résultat pour la torsion première à p, c'est-à-dire pour le sous-groupe $Tor_{p'}(G)$ des éléments de torsion de G dont l'ordre n'est pas divisible par p. On obtient dans ce cas que

$$X(k^{alg}) \cap Tor_{p'}(G) = \bigcup_{i=1}^{N} a_i + Tor_{p'}(G_i),$$

où il est facile de montrer directement que $N \leq a \ \deg(X)^b$, avec a doublement exponentiel (en la dimension de A, le degré de l'addition dans A et la cardinalité du corps résiduel) et b exponentiel en la dimension de A.

Le but de cet exposé, en présentant la démonstration de Hrushovski, est d'essayer d'expliquer pourquoi la théorie des modèles a quelque chose à dire sur ce type de questions et aussi de donner une idée des résultats qu'on montre et des outils qu'on développe en théorie des modèles.

Nous passerons donc rapidement sur les parties purement « géométrie algébrique » de la démonstration.

De même, la très brève présentation historique et bibliographique qui suit n'a, cela sera visible tout de suite, aucune prétention d'exhaustivité.

1.1. Petit historique et conjecture de Lang

La conjecture de Manin-Mumford originelle porte sur l'intersection d'une courbe avec les points de torsion d'une variété abélienne. Elle a été tout d'abord démontrée par M. Raynaud ([Ra1]), puis R. Coleman ([Col]) en a donné une autre démonstration par des méthodes très différentes ; Raynaud a ensuite ([Ra2]) démontré le résultat pour une sous-variété quelconque, puis M. Hindry ([Hi1]), en s'inspirant d'une idée de S. Lang ([La1]) pour le cas des courbes, a démontré le résultat général pour un groupe algébrique commutatif.

On trouve une autre approche de ces questions dans les travaux sur la conjecture de Bogomolov, on se contentera ici de renvoyer à l'exposé de A. Abbes sur le sujet dans le cadre de ce séminaire ([Ab]) et aux travaux récents de S. David et P. Philippon ([DaPh]).

En revanche, nous allons dire quelques mots de la conjecture de Lang (dite aussi conjecture de Mordell-Lang), énoncée par Lang dans [La1] et qui regroupe dans un cadre général la conjecture de Manin-Mumford et la conjecture de Mordell (voir aussi par exemple [La2]).

Nous l'énonçons ici pour la caractéristique zéro :

Conjecture de Lang (absolue). — *Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, A une variété abélienne définie sur K, X une sous-variété de A définie sur K et Γ un sous-groupe de $A(K)$ de rang fini. Alors il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ et $B_1, \ldots, B_n$ sous-variétés abéliennes de A tels que $\gamma_i + B_i \subset X$ et*

$$X(K) \cap \Gamma = \cup_{i=1}^{n} \gamma_i + (B_i(K) \cap \Gamma).$$

Cette conjecture a finalement été démontrée par G. Faltings ([Fa]) après de nombreux travaux entre autres de Manin, Vojta, Laurent, Hindry et Faltings lui-même. On peut trouver des bibliographies récentes, commentées et complètes, dans [Hi2] ou [Maz]. L'extension au cas des variétés semi-abéliennes est due à Vojta([Voj]) et McQuillan ([McQ]).

Si on veut étendre cette conjecture au cas de caractéristique non nulle, il faut se contenter d'une version relative, dite aussi conjecture de Lang pour les corps de fonctions. En voici un énoncé un peu simplifié :

CONJECTURE DE LANG POUR LES CORPS DE FONCTIONS. — *Soient $K_0 < K$ deux corps algébriquement clos, A une variété abélienne définie sur K de K/K_0-trace zéro, et X une sous-variété de A définie sur K. Soit Γ un sous-groupe de rang fini de $A(K)$. Alors il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ et $B_1, \ldots, B_n$ sous-variétés abéliennes de A tels que $\gamma_i + B_i \subseteq X$ et*

$$X(K) \cap \Gamma = \cup_{i=1}^{n} \gamma_i + (B_i(K) \cap \Gamma).$$

On rappelle que Γ est de *rang fini* si il existe un groupe Γ_0 finiment engendré tel que, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, il y a un entier $n \geq 1$ tel que $n\gamma \in \Gamma_0$. Si on est en caractéristique $p > 0$, on demande que l'entier n ne soit pas divisible par p. Dire que A est de K/K_0-trace zéro est équivalent à dire que A n'a aucune sous-variété abélienne homomorphe à une variété abélienne définie sur K_0.

Dans [Hr1], Hrushovski a donné une démonstration modèle-théorique de la conjecture de Lang pour les corps de fonctions en toute caractéristique (on peut trouver une présentation de ces résultats dans l'exposé [Go] de ce séminaire, ou dans [Pi3], et une exposition plus détaillée dans le livre [Bo]). Pour la caractéristique $p > 0$, il s'agissait de la première démonstration du cas général, les résultats précédents (voir [AbrVo]) nécessitant des hypothèses supplémentaires. Un peu auparavant, A. Buium ([Bu]) avait donné une nouvelle démonstration du cas de caractéristique zéro, dont l'idée de départ était de passer à un corps différentiellement clos et de remplacer le groupe Γ par un groupe Δ-fermé (ou différentiellement algébrique) de dimension finie. C'est cette idée qui est l'inspiration des démonstrations de Hrushovski, pour les deux résultats, Lang pour les corps de fonctions et Manin-Mumford.

1.2. Le rapport avec la théorie des modèles

L'idée qui est à la base de ces deux démonstrations est donc la suivante : on veut remplacer le sous-groupe Γ ($Tor(G)$ dans notre cas) par un sous-groupe « fermé » ou « algébrique », pour lequel on montrera le résultat. On ne peut pas le faire sans, d'une manière ou d'une autre, rajouter des « fermés » supplémentaires (c'est-à-dire de la structure supplémentaire), puisque, quand G par exemple est une variété abélienne, la torsion est dense dans G. C'est exactement ce que fait Buium dans [Bu], quand il passe dans un corps différentiellement clos, remplace le groupe Γ par un groupe Δ-fermé de dimension finie et utilise ensuite l'arsenal des outils développés dans ce cadre. Or c'est là une méthode qui rentre tout à fait dans la problématique développée en théorie des modèles et pour laquelle nous disposons d'un cadre systématique, d'outils et de résultats déjà existants. En effet, puisant son inspiration dans la géométrie algébrique et les géométries combinatoires, la théorie des modèles développe dans un cadre abstrait des notions d'indépendance, de dimension et de géométrie. Cela a

permis d'isoler une notion qui va se retrouver au centre de toutes ces applications récentes : la notion de *modularité* qui caractérise, à partir du comportement de la relation d'indépendance, les groupes dans lesquels les seuls sous-ensembles qu'on peut définir sont les (combinaisons booléennes finies de) translatés de sous-groupes. Montrer que le groupe $Tor(G)$ satisfait l'énoncé de Manin-Mumford, c'est exactement, une fois qu'on s'est placé dans le bon cadre, montrer que c'est un groupe modulaire, nous le verrons dans les sections 2.2 et 2.3 ; et l'on a des outils pour cela.

1.3. Le cadre dans lequel on travaille

On a donc un groupe algébrique, G, défini sur un corps de nombres k. On va considérer un automorphisme σ dans $Gal(k^{alg}/k)$, judicieusement choisi, de manière à ce que la torsion soit contenue dans le sous-groupe S_σ des solutions, dans $G(k^{alg})$, d'une équation faisant intervenir σ (ce qu'on appelle traditionnellement une équation de différence) qu'on peut explicitement calculer. On plonge alors (k^{alg}, σ) dans un gros corps K sur lequel σ se prolonge et qui est clos en ce sens qu'il contient déjà des solutions pour toute équation de différence qui a une solution dans une extension. C'est ce qu'on appellera un corps de différence générique. Et, de même qu'on a la topologie de Zariski sur un corps algébriquement clos ou la Δ-topologie sur un corps différentiellement clos, on définit une σ-topologie sur K. La théorie des modèles permet d'analyser la structure de K avec ces nouveaux ensembles géométriques. Cette analyse a été faite par Z. Chatzidakis et E. Hrushovski dans [ChHr] qui montrent qu'on peut y définir une bonne notion d'indépendance et de dimension. En particulier, ils démontrent en caractéristique zéro un théorème de dichotomie, qui dit à peu près que les seuls ensembles de dimension finie qui ne sont pas « modulaires » se trouvent dans le corps fixé par σ. À partir de cette analyse et de ce théorème de dichotomie, Hrushovski trouve un critère « effectif » pour distinguer, parmi les sous-groupes de $G(K)$ définis par des équations de différence, ceux qui sont modulaires. Il ne reste plus qu'à vérifier que le sous-groupe S_σ judicieusement choisi plus haut est du bon type, puis à borner le nombre de translatés qui vont intervenir par des calculs simples à partir de l'équation qui définit S_σ.

C'est exactement comme cela que cela se passe dans le cas de la torsion première à p. Pour la torsion totale, c'est un peu plus compliqué, car, s'il est facile, en travaillant à partir de deux premiers de bonne réduction distincts, de montrer qu'il existe une σ-équation qui s'annule sur la torsion toute entière et est du bon type, on ne sait pas le faire de manière effective. Donc, si on veut garder des bornes sur le nombre de translatés, il faut travailler un peu plus, en gardant deux équations distinctes, l'une pour la torsion première à p, l'autre pour la p-torsion puis combiner les deux.

Dans une première partie, nous allons présenter le cadre modèle théorique, c'est-à-dire les corps de différence génériques et les groupes que l'on peut y définir avec des équations de différence (section 2). Ensuite nous expliquerons comment utiliser les résultats ainsi obtenus pour démontrer la conjecture de Manin-Mumford (section