

**433**

**ASTÉRISQUE**

**2022**

TRIANGULATED CATEGORIES  
OF LOGARITHMIC MOTIVES  
OVER A FIELD

Federico BINDA, Doosung PARK & Paul Arne ØSTVÆR

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 433, 2022

---

*Comité de rédaction*

Marie-Claude ARNAUD	Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL	Nicolas RESSAYRE
Philippe EYSSIDIEUX	Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU	Sylvia SERFATY
Fanny KASSEL	Sug Woo SHIN
Eric MOULINES	

Nicolas BURQ (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA

commandes@smf.emath.fr    <http://www.ams.org>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 55 € (\$ 82)

*Abonnement* Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1 077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Fax: (33) 01 40 46 90 96  
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2022

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-957-9

doi:10.24033/ast.1172

Directeur de la publication : Fabien Durand

---

**433**

**ASTÉRISQUE**

**2022**

TRIANGULATED CATEGORIES  
OF LOGARITHMIC MOTIVES  
OVER A FIELD

Federico BINDA, Doosung PARK & Paul Arne ØSTVÆR

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Federico Binda*

Dipartimento di Matematica F. Enriques, Università degli Studi di Milano  
Via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italy  
federico.binda@unimi.it

*Doosung Park*

Institut für Mathematik, Universität Zürich  
Winterthurerstr. 190, 8057 Zürich, Switzerland  
doosung.park@math.uzh.ch

*Paul Arne Østvær*

Department of Mathematics, University of Oslo, Niels Henrik Abels hus, Moltke Moes  
vei 35, 0851 Oslo, Norway  
Dipartimento di Matematica F. Enriques, Università degli Studi di Milano  
Via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italy  
paularne@math.uio.no paul.oestvaer@unimi.it

Texte reçu le 26 septembre 2020, accepté le 14 septembre 2021.

---

**Mathematical Subject Classification (2020).** — 14A21, 14A30, 14F42, 18N40, 18N55; 18F10, 18G35, 19E15.

**Keywords.** — Triangulated motives, logarithmic schemes, non  $\mathbb{A}^1$ -invariant cohomology theories, Hodge cohomology.

**Mots-clefs.** — Motifs triangulés, log schémas, théories cohomologiques non  $\mathbb{A}^1$ -invariantes, cohomologie de Hodge.

# TRIANGULATED CATEGORIES OF LOGARITHMIC MOTIVES OVER A FIELD

by Federico BINDA, Doosung PARK & Paul Arne ØSTVÆR

**Abstract.** — In this work we develop a theory of motives for logarithmic schemes over fields in the sense of Fontaine, Illusie, and Kato. Our construction is based on the notion of finite log correspondences, the dividing Nisnevich topology on log schemes, and the basic idea of parameterizing homotopies by  $\overline{\square}$ , i.e., the projective line with respect to its compactifying logarithmic structure at infinity. We show that Hodge cohomology of log schemes is a  $\overline{\square}$ -invariant theory that is representable in the category of logarithmic motives. Our category is closely related to Voevodsky’s category of motives and  $\mathbb{A}^1$ -invariant theories: assuming resolution of singularities, we identify the latter with the full subcategory comprised of  $\mathbb{A}^1$ -local objects in the category of logarithmic motives. Fundamental properties such as  $\overline{\square}$ -homotopy invariance, Mayer-Vietoris for coverings, the analogs of the Gysin sequence and the Thom space isomorphism as well as a blow-up formula and a projective bundle formula witness the robustness of the setup.

**Résumé.** (Catégories triangulées des motifs logarithmiques sur un corps) — Ce texte a comme objectif la construction et l’étude d’une théorie des motifs mixtes pour les schémas logarithmiques sur un corps au sens de Fontaine, Illusie et Kato. Notre construction repose sur la notion de correspondance logarithmique finie, la topologie *dividing*-Nisnevich sur les schémas logarithmiques, et l’idée de paramétrer les homotopies par  $\overline{\square}$ , c’est-à-dire la droite projective avec sa structure logarithmique standard à l’infini. On montre que la cohomologie de Hodge des schémas logarithmiques est une théorie  $\overline{\square}$ -invariante et représentable dans la catégorie des motifs logarithmiques. La catégorie des motifs mixtes de Voevodsky avec transferts se plonge de façon naturelle (en supposant la résolution des singularités sur le corps de base) dans notre catégorie, et nous l’identifions avec sa sous-catégorie pleine donnée par les objets  $\mathbb{A}^1$ -locaux. Nous démontrons aussi des propriétés fondamentales comme des analogues du triangle *de Gysin* et d’éclatement, une formule du fibré projectif et un théorème d’isomorphisme de Thom.