

339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2009/2010  
EXPOSÉS 1012-1026

(1018) *Métriques kählériennes extrémales  
sur les surfaces toriques*

Olivier BIQUARD

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES EXTRÊMALES  
SUR LES SURFACES TORIQUES**  
[d'après S. Donaldson]

par **Olivier BIQUARD**

**INTRODUCTION**

Dans les années 1980, E. Calabi, étudiant les variétés complexes, a initié le programme consistant à trouver dans une classe de Kähler une métrique privilégiée, appelée extrémale [5, 6]. La recherche dans ce domaine est devenue particulièrement active depuis le programme de S. Donaldson dans les années 2000 [10, 11]. Donnons-en la conjecture centrale dans le cas des métriques à courbure scalaire constante (un cas particulier de métrique extrémale) :

**CONJECTURE 0.1** (Yau-Tian-Donaldson). — *Soit  $X$  une variété compacte complexe, munie d'une classe de Kähler entière  $L$ . Alors l'existence d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante dans  $L$  est équivalente à une propriété algébrique de  $(X, L)$ , appelée K-polystabilité.*

La condition algébrique de K-(poly)stabilité sera précisée plus loin : introduite par Tian [27] dans l'étude des métriques de Kähler-Einstein, elle a été généralisée par Donaldson [13].

La conjecture est un analogue sur les variétés de la correspondance fameuse de Hitchin-Kobayashi entre fibrés holomorphes polystables et métriques de Hermite-Einstein.

La partie facile de la correspondance de Hitchin-Kobayashi sur les fibrés est le fait que l'existence d'une métrique de Hermite-Einstein implique la stabilité. Sur les variétés, même cette direction, à savoir la nécessité de la condition de K-polystabilité, est difficile : après les travaux initiaux de Donaldson [12] (voir l'exposé [4]), cette partie est maintenant largement démontrée [25, 23, 24]. En revanche, construire une métrique à courbure scalaire constante sur une variété K-polystable est considérablement plus délicat. Le théorème suivant de Donaldson est donc important, en ce qu'il

exhibe la première classe assez large de variétés kählériennes sur laquelle est vérifiée la conjecture :

**THÉORÈME 0.2** (Donaldson). — *La conjecture est vraie sur les surfaces complexes toriques.*

Ce théorème est le point culminant d'un travail de plusieurs années sur les variétés toriques [13, 14, 15, 17], dont cet exposé tente de rendre compte. Sur la géométrie kählérienne torique en général, et son extension aux variétés sans multiplicité, on pourra consulter utilement le survey [16]. L'article [26] étudie ce qu'on peut dire quand la variété torique n'est pas K-polystable.

*Remerciements.* Je remercie en particulier Paul Gauduchon et Vincent Minerbe pour leur aide précieuse dans la lecture des travaux évoqués ici.

## 1. GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE TORIQUE

Une *variété torique* est une variété kählérienne  $(X^n, \omega)$ , munie de l'action hamiltonienne effective d'un tore compact  $T^n = \mathfrak{t}/\Lambda$ .

### 1.1. Structure symplectique

On dispose alors d'une application moment,  $T$ -invariante,  $\mu : X \rightarrow \mathfrak{t}^*$ . En clair, si  $(K^1, \dots, K^n)$  est une base de champs de vecteurs induits par l'action de  $T^n$ , et  $(x^1, \dots, x^n)$  sont les coordonnées sur  $\mathfrak{t}^*$  données par  $x^i = \langle K^i, \cdot \rangle$ , alors on peut voir les  $x_i$  comme des fonctions sur  $X$  via  $\mu$ , et elles satisfont

$$(1) \quad dx^i = -\iota_{K^i} \omega.$$

On peut choisir des coordonnées angulaires  $\theta_i$ , de sorte que  $K^i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ , et la forme de Kähler s'exprime alors, sur l'ouvert où l'action de  $T$  est libre, comme<sup>(1)</sup>

$$(2) \quad \omega = dx^i \wedge d\theta_i.$$

Les  $(x^i, \theta_i)$  sont les coordonnées action-angle (le choix des  $\theta_i$  n'est pas unique).

L'image  $P = \mu(X)$  est un polytope convexe de  $\mathfrak{t}^*$ , enveloppe convexe de l'image des points fixes de l'action de  $T$ ; il satisfait les axiomes des *polytopes de Delzant* :

1.  $P$  est simple : chaque sommet est l'intersection d'exactly  $n$  faces (de codimension 1) ;

<sup>(1)</sup> Dans tout l'exposé, on utilisera la convention usuelle de sommation implicite : si un symbole apparaît à la fois comme indice et comme exposant dans une formule, alors il est automatiquement sommé ; par exemple, la formule (2) signifie en réalité  $\sum_i dx^i \wedge d\theta_i$ .

2.  $P$  est rationnel : chaque face a une normale rationnelle  $\nu \in \mathbb{Q}\Lambda \subset \mathfrak{t}$ ; on choisira toujours la normale entière ( $\nu \in \Lambda$ ), primitive, et pointant vers l'intérieur de  $P$ ;
3. à chaque sommet, l'ensemble des normales des  $n$  faces s'intersectant en ce sommet est une base entière de  $\Lambda$ .

Réciproquement, tout polytope de Delzant est l'image par l'application moment d'une variété torique [9]. La construction se fait de la manière suivante : soient  $\nu_1, \dots, \nu_H$  les normales (entières, primitives, entrantes) aux  $H$  faces du polytope  $P$ , de sorte que  $P = \cap_i \{ \langle \nu_i, x \rangle + c_i > 0 \}$ . On considère l'action du tore  $T^H$  sur  $\mathbb{C}^H$ , dont l'application moment est  $(\frac{1}{2}|z^1|^2 - c_1, \dots, \frac{1}{2}|z^H|^2 - c_H)$ . L'application  $\mathbb{R}^H \rightarrow \mathfrak{t}$ , donnée par  $(y_k) \mapsto \sum_1^H y_k \nu_k$ , induit un morphisme  $T^H \rightarrow T$  dont on appellera le noyau  $N$ . Alors on récupère la variété torique  $X$  par le quotient kählérien  $X = \mathbb{C}^H // N$ , muni de l'action résiduelle de  $T = T^H / N$ . L'application moment  $\mu_N : \mathbb{C}^H \rightarrow \mathfrak{n}^*$  est la restriction à  $\mathfrak{n}$  de  $\mu$ . L'application moment de l'action de  $T$  sur  $X$  apparaît alors comme la restriction de  $\mu$  à  $\mu_N^{-1}(0)$ , et on peut vérifier explicitement que son image est le polytope  $P$ .

### 1.2. Structure complexe : les coordonnées complexes

L'action du tore  $T^n$  s'étend en une action holomorphe du complexifié  $T_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^*)^n$ . Choissant un point base dans  $X$ , un ouvert dense de  $X$  est ainsi identifié à  $(\mathbb{C}^*)^n$ , et donc muni de coordonnées complexes  $z_a = \exp(y_a + i\theta_a)$ , où  $y_a \in \mathbb{R}$  et  $\theta_a$  est une variable angulaire. Dans ces coordonnées, la forme de Kähler est donnée par un potentiel  $T$ -invariant  $\varphi$ , de sorte que  $\omega = dd^C \varphi (= 2i\partial\bar{\partial}\varphi)$ . On calcule alors la forme de Kähler  $\omega$  et la métrique  $g$  :

$$(3) \quad \omega = \frac{\partial^2 \varphi}{dy_a dy_b} dy_a \wedge dy_b, \quad g = \frac{\partial^2 \varphi}{dy_a dy_b} (dy_a dy_b + d\theta_a d\theta_b).$$

### 1.3. Structure complexe : les coordonnées symplectiques

L'invariance sous  $T$  des  $x^i$  et de la structure complexe  $J$  implique immédiatement  $(dJdx^i)_{K_j, K_k} = 0$ . En outre, puisque  $J$  est une structure complexe intégrable, la 2-forme  $dJdx^i = d^C dx^i$  est de type  $(1, 1)$ . Comme les  $(1, 1)$ -formes sont engendrées par les formes

$$(4) \quad dx^j \wedge dx^k + (Jdx^j) \wedge (Jdx^k) \text{ et } (Jdx^j) \wedge dx^k - dx^j \wedge (Jdx^k),$$

ces deux faits ensemble impliquent que  $dJdx^i$  se décompose uniquement sur les formes de type  $(Jdx^j) \wedge dx^k - dx^j \wedge (Jdx^k)$ . Ainsi l'idéal engendré par les 1-formes  $Jdx^i$  est préservé par  $d$ , donc la distribution  $D = \cap \ker(Jdx^i)$  est intégrable. On peut alors choisir les coordonnées  $\theta_i$  de sorte que  $D = \cap \ker d\theta_i$ .

On écrit alors

$$(5) \quad Jdx^i = G^{ij} d\theta_j, \quad Jd\theta_i = -G_{ij} dx^j,$$

où  $(G_{ij}) = (G^{ij})^{-1}$ , et on déduit de (2) la forme de la métrique :

$$(6) \quad g = G_{ij} dx^i dx^j + G^{ij} d\theta_i d\theta_j.$$

En particulier, la matrice  $(G_{ij})$  est symétrique, définie positive. En outre, notant  $f_{,k}$  la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x^k}$  (souvent on notera plus simplement  $f_k$  quand le contexte est clair), la 2-forme  $dJd\theta_i = -G_{ij,k} dx^k \wedge dx^j$  est à nouveau de type  $(1, 1)$ . Compte tenu de (4), il faut que  $dJd\theta_i = 0$ , donc  $G$  satisfait la symétrie des dérivées :  $G_{ij,k} = G_{ik,j}$ . Il existe donc une fonction réelle  $u$ , strictement convexe, telle que  $(G_{ij})$  soit le hessien de  $u$  :  $G_{ij} = u_{ij}$ . En notant  $(u^{ij})$  la matrice inverse de  $(u_{ij})$ , on obtient la forme définitive de la métrique :

$$(7) \quad g = u_{ij} dx^i dx^j + u^{ij} d\theta_i d\theta_j.$$

Ainsi, dans les coordonnées action-angle, la structure complexe est-elle entièrement codée par la seule donnée de la fonction  $u$ , appelée *potentiel symplectique*. Il est important de noter que  $u$  est déterminé uniquement à addition près d'une fonction affine.

#### 1.4. La transformation de Legendre

On fait maintenant le lien entre les deux points de vue, complexe et symplectique. On a une base de  $(1, 0)$ -formes,

$$(8) \quad \epsilon_a = d\theta_a - i u_{ab} dx^b = -id(u_a + i\theta_a).$$

Les  $(1, 0)$ -formes  $\epsilon_a$ , fermées, sont holomorphes, donc les  $(u_a + i\theta_a)$  peuvent s'identifier aux coordonnées complexes  $y_a + i\theta_a$  vues en 1.2. Posons ainsi

$$(9) \quad y_a = u_a.$$

Identifions la forme de Kähler  $\omega$  dans les deux formalismes. Par (3),

$$\omega = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_a \partial y_b} dy_a \wedge dy_b = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_a \partial y_b} u_{ac} dx^c \wedge d\theta_b,$$

à identifier avec  $\omega = dx^b \wedge d\theta_b$ . Il faut donc que

$$(10) \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_a \partial y_b} \right) = (u_{ab})^{-1} = (u^{ab}).$$

Autrement dit, il faut que le hessien de  $\varphi$  dans les coordonnées  $y$  soit l'inverse du hessien de  $u$  dans les coordonnées  $x$ , ce qui est typique de la transformée de Legendre : la solution est que  $\varphi$  et  $u$  sont images l'une de l'autre par la transformée de Legendre :

$$(11) \quad \varphi = u_b x^b - u.$$