352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

(1046) *Concentration compacité à la Kenig-Merle*

Pierre RAPHAËL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2011
64e année, 2011-2012, nº 1046, p. 121 à 146

CONCENTRATION COMPACITÉ À LA KENIG-MERLE

par **Pierre RAPHAËL**

Dans leurs articles de référence [**24**], [**25**], Kenig et Merle ouvrent une brèche spectaculaire dans l'étude qualitative des équations aux dérivées partielles. Ce travail est l'aboutissement d'une lente maturation sur une problématique qui naît à la fin des années 1970 dans les travaux pionniers de Ginibre et Velo [**19**], [**20**] et est lui-même le commencement de développements considérables, puisque déjà une série importante de travaux reprend comme un classique la « feuille de route » à la Kenig-Merle.

L'objet de cet exposé est de présenter les principaux résultats obtenus mais surtout de les replacer au sein d'une dynamique scientifique aux multiples facettes et dont l'inspiration provient de domaines très divers des mathématiques : le calcul des variations et les méthodes variationnelles, l'analyse harmonique et les systèmes dynamiques. La notion d'onde solitaire apparaît de façon centrale dans l'analyse. J'illustrerai la profonde unité entre ce travail de 2006 et la percée de Merle [**41**] de 1992 qui obtient la première classification dynamique de l'onde solitaire pour un problème critique, résultat pionnier et totalement isolé à l'époque, et qui contient en fait en substance l'ensemble des arguments.

Il faudra à la suite de ce travail en premier abord très spécifique quatorze ans pour comprendre la profonde universalité de l'argument et développer une méthode de compacité robuste et des outils universels pour classifier la dynamique exceptionnelle de l'onde solitaire. Cette stratégie d'approche par théorème de rigidité à la Liouville, qui avait déjà donné des résultats spectaculaires en elliptique nonlinéaire à la fin des années 1970, s'est développée dans les travaux de Merle et ses collaborateurs autour de la description fine de dynamiques explosives pour des EDP d'abord paraboliques, Merle-Zaag [**50**], puis dispersives Martel-Merle [**37**], Merle-Raphaël [**43**]. L'adaptation de cette approche et la mise en place d'une stratégie robuste pour obtenir des critères optimaux d'existence globale ou dispersion pour des problèmes nonlinéaires requiert en sus l'apport de la machinerie des estimations de Strichartz issue de l'analyse harmonique [**66**], [**19**], et les lemmes de description de perte de compacité à la Lions

[34] via leur version moderne de décomposition en profils [1], [49], [27], l'ensemble aboutissant à la « feuille de route » à la Kenig-Merle mise en œuvre pour la première fois dans [24].

1. EXISTENCE GLOBALE ET EXPLOSION : UN PROBLÈME MODÈLE

Notre compréhension des flots nonlinéaires en dimension infinie est extrêmement pauvre, et même la seule construction d'exemples de dynamiques génériques est souvent mal comprise. La question de l'existence globale des solutions ou au contraire la possibilité de dynamiques explosives est en général ouverte même pour des problèmes modèles, et c'est par exemple l'objet du Prix Clay du Millenium pour les équations de Navier Stokes qui sont l'exemple canonique de modèle surcritique.

Nous présentons dans cette section un problème modèle : l'équation de Schrödinger nonlinéaire

$$(NLS) \quad \left\{ \begin{array}{l} i\partial_t u + \Delta u \pm u|u|^{p-1} = 0 \\ u_{t=0} = u_0 \end{array} \right. \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Nous montrons comment l'analyse aujourd'hui classique de Ginibre et Velo [19] permet l'identification des problèmes critiques/surcritiques, puis comment les méthodes variationnelles des années 1980 permettent de construire une solution exceptionnelle : l'onde solitaire. Nous présentons enfin la percée de Merle [41] qui couple les méthodes variationnelles à un argument dispersif dynamique pour obtenir la première classification *dynamique* de l'onde solitaire.

1.1. Existence locale et globale

Ginibre et Velo résolvent le problème de Cauchy local en temps dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R}^d)$ et obtiennent l'exact analogue du Théorème de Cauchy Lipschitz pour les ODE :

Théorème 1.1 (Ginibre, Velo [20]). — *Soient l'exposant de Sobolev*

$$2^* = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & pour \;\; d = 1,2 \\ \frac{2d}{d-2} & pour \;\; d \geq 3 \end{array} \right.$$

et une nonlinéarité énergie sous-critique :

$$1 < p < 2^* - 1;$$

alors pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *il existe un temps maximal* $0 < T = T(u_0) \leq +\infty$ *et une unique solution* $u \in \mathscr{C}([0,T), H^1(\mathbb{R}^d))$ *de* (1). *En outre, on a le critère d'explosion*

$$T < +\infty \quad \Longrightarrow \lim_{t \uparrow T} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty. \tag{2}$$

L'existence globale peut maintenant dans certains cas être obtenue comme une conséquence des lois de conservation attachées à la structure hamiltonienne de (1) : la conservation de la masse

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 dx,$$

et la conservation de l'énergie totale du système

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|^2 dx \mp \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{p+1} dx = E(u_0). \tag{3}$$

En vertu du critère d'explosion (2), il suffit pour obtenir l'existence globale de montrer une borne *a priori* sur la norme H^1, ce qui en vertu de la conservation de l'énergie (3) est immédiat dans le cas défocalisant, signe « - » dans (1), où dispersions linéaire et nonlinéaire s'additionnent. Dans le cas focalisant plus délicat, signe « + » dans (1), la nonlinéarité tend à concentrer l'onde et agit contre la dispersion. En vertu de Sobolev,

$$\|u\|_{L^{p+1}} \lesssim \|u\|_{\dot{H}^s} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^s \|u\|_{L^2}^{1-s}, \quad -s + \frac{d}{2} = \frac{d}{p+1}, \quad \text{i.e.} \quad s = \frac{d(p-1)}{2(p+1)},$$

les lois de conservation impliquent un contrôle H^1 uniforme pour

$$s(p+1) < 2, \quad \text{i.e.} \quad p < 1 + \frac{4}{d}.$$

On a donc le théorème d'existence globale :

Corollaire 1.2 (Existence globale). — *Sous les hypothèses du théorème 1.1, la solution est globale* $T = +\infty$ *dans les cas :*

1. *défocalisant ;*
2. *focalisant* L^2 *sous-critique :* $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$.

1.2. Invariance d'échelle et théorie critique

Cazenave et Weissler généralisent la théorie de Cauchy dans l'espace d'énergie H^1 et établissent dans **[6]** la théorie de Cauchy locale *Sobolev critique*. Le niveau Sobolev critique de (1) se calcule via l'invariance d'échelle du flot

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t \lambda x), \quad \lambda > 0$$

qui laisse invariante la norme Sobolev homogène

$$\|u_\lambda(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)} = \|u(\lambda^2 t, \cdot)\|_{\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)}$$

pour

$$s_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}.$$

Les estimations de Strichartz [**66**], qui sont une mesure robuste via des normes espace-temps de la dispersion du flot linéaire, permettent de résoudre de manière complètement élémentaire le problème de Cauchy local en temps.

THÉORÈME 1.3 (Problème de Cauchy local critique, [**6**]). — *Soit*

$$1 + \frac{4}{d} \leq p \leq 2^*, \quad \textit{i.e.} \quad 0 \leq s_c \leq 1\,;$$

alors pour toute donnée $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, *il existe* $0 < T = T(u_0)$ *et une unique*[(1)] *solution* $u \in \mathscr{C}^0([0,T), \dot{H}^s(\mathbb{R}^d))$ *de* (1). *En outre, il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que*

$$\|u_0\|_{\dot{H}^s} < \varepsilon_0 \Longrightarrow \quad T = +\infty.$$

Une différence majeure avec le cas des données H^1 est que l'analogue du critère d'explosion (2) est maintenant nettement plus subtil[(2)], et notamment le temps de vie de la solution est fondamentalement une fonction du *profil* de la donnée initiale, et ne peut pas dépendre du seul contrôle de la norme Sobolev invariante d'échelle. En particulier, il existe *deux problèmes critiques* pour lesquels l'invariance d'échelle vit au niveau d'une loi de conservation : le problème L^2 ou masse critique

$$s_c = 0, \quad \text{i.e.} \quad p = 1 + \frac{4}{d},$$

et le problème énergie critique

$$s_c = 1, \quad \text{i.e.} \quad p = 2^* - 1, \quad d \geq 3.$$

Par exemple pour le problème masse critique, la conservation de la masse assure le contrôle uniforme de la norme critique $\|u(t,\cdot)\|_{L^2}$, mais cela ne suffit pas à assurer *a priori* l'existence globale : la norme critique peut *concentrer*.

Un corollaire remarquable de cette approche est que, pour les données petites, non seulement on démontre existence globale, mais on obtient gratuitement *scattering*, soit le fait que la solution du problème nonlinéaire se comporte asymptotiquement en temps long comme une solution du problème linéaire, et donc en particulier converge localement en espace vers la solution triviale nulle. On démontre de manière similaire que l'ensemble des données dont la solution disperse au sens Strichartz est *un ouvert* dans l'espace critique, et c'est donc une dynamique stable sans hypothèse de taille.

Dans le cas du problème L^2 critique défocalisant, on obtient donc existence globale pour des données H^1, mais seulement locale pour des données peu régulières.

---

(1) Il faudrait être plus précis sur la notion d'unicité qui n'est stricto sensu connue que pour les solutions Strichartz.

(2) Et fait intervenir la norme Strichartz espace temps associée au problème de Cauchy.