

352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI

VOLUME 2011/2012

EXPOSÉS 1043-1058

(1057) *Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids*

Jean-Marc FONTAINE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

PERFECTOÏDES, PRESQUE PURETÉ ET MONODROMIE-POIDS [d'après Peter Scholze]

par Jean-Marc FONTAINE

INTRODUCTION

Quiconque s'est intéressé aux corps locaux sait bien qu'une extension très ramifiée du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p -adiques ressemble à s'y méprendre à un corps de séries formelles à coefficients dans son corps résiduel. C'est sans doute Marc Krasner qui a tenté le premier de formuler [24] ce phénomène abondamment utilisé depuis en théorie de Hodge p -adique où une construction cruciale associe à toute extension algébrique K de $\mathbb{Q}_p$ suffisamment ramifiée un corps parfait valué complet de caractéristique p noté ici $K^\flat$ ⁽¹⁾.

Dans [28], Peter Scholze systématise cette construction. Un *corps perfectoïde* est un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne non discrète à corps résiduel de caractéristique p tel que le Frobenius $x \mapsto x^p$ est surjectif sur la réduction modulo p de l'anneau de ses entiers. Scholze introduit une catégorie d'espaces analytiques sur K ⁽²⁾, les *espaces perfectoïdes sur K* , et montre qu'elle est équivalente à la catégorie des espaces perfectoïdes sur $K^\flat$. Cette équivalence respecte les morphismes étales. Ce résultat contient le théorème de presque pureté de Faltings (qui est à la base de l'approche *presque étale* des théorèmes de comparaison p -adique) et en donne une preuve limpide.

Lorsque X est une intersection complète dans un espace projectif ou, plus généralement, dans une variété torique projective lisse sur un corps local de caractéristique 0,

⁽¹⁾ Mais souvent noté $R(K)$ ou $\mathcal{R}(K)$ dans la littérature. Dans [11] et [30], on associe à toute extension arithmétiquement profinie E de $\mathbb{Q}_p$ (par exemple sa $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique), son *corps des normes* $\tilde{E} (\simeq \mathbb{F}((t)))$ si $\mathbb{F}$ est le corps résiduel de E) et on montre que la théorie de Galois (ou le petit site étale) de E s'identifie à celle de $\tilde{E}$. Le complété K de E est alors un corps perfectoïde et $K^\flat$ est le complété de la clôture radicielle de $\tilde{E}$. Les petits sites étales de E , K , $\tilde{E}$ et $K^\flat$ s'identifient.

⁽²⁾ Ce sont des espaces adiques au sens de Huber [14].

Scholze montre que la cohomologie étale ℓ -adique (pour $\ell \neq p$) de X se réalise comme un facteur direct de celle d'une variété en caractéristique p , ce qui lui permet de déduire, dans ce cas, la conjecture monodromie-poids du théorème de Deligne en égale caractéristique.

Ces techniques devraient avoir bien d'autres applications. Dans une prépublication trop récente pour que je puisse en parler sérieusement ici [27], Scholze les utilise pour obtenir de nombreux résultats sur la théorie de Hodge p -adique des variétés rigides analytiques sur les corps p -adiques. Soit k un corps de caractéristique 0, complet pour une valeur absolue telle que $|p| < 1$, à corps résiduel parfait et soit X une variété rigide analytique propre et lisse sur k . Scholze obtient, entre autres

- lorsque k est algébriquement clos, la finitude de la cohomologie d'un système local de p -torsion sur $X_{\text{ét}}$,
- lorsque la valuation de k est discrète, l'analogue du théorème de comparaison entre cohomologie de de Rham et cohomologie étale p -adique pour les $\mathbb{Q}_p$ -faisceaux lisses de de Rham.

Je remercie Laurent Fargues, Luc Illusie et Peter Scholze pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

0.1. Conventions et notations

Dans tout ce texte, les anneaux sont commutatifs. Si A est un anneau, une A -algèbre est associative, commutative et unitaire. Si k est un corps, on note $\bar{k}$ une clôture séparable choisie de k .

Une *norme* sur un anneau A est ultramétrique et sous-multiplicative. C'est donc une application

$$|\cdot| : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

telle que $|a| = 0 \iff a = 0$, $|1| = 1$, $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$, $|ab| \leq |a| \cdot |b|$.

Une norme $|\cdot|$ sur un anneau A le munit d'une structure d'anneau topologique séparé. Deux normes sur A sont *équivalentes* si elles définissent la même topologie.

Un *anneau de Banach* ⁽³⁾ est un anneau topologique dont la topologie peut être définie par une norme, qui est complet et qui admet une *pseudo-uniformisante*, c'est-à-dire un élément topologiquement nilpotent inversible.

Si A est un anneau de Banach et si $|\cdot|$ est une norme sur A qui définit sa topologie, on dit qu'une partie M de A est bornée, s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq C$ pour tout $a \in M$. Cette propriété ne dépend pas du choix de la norme.

Si A est une k -algèbre de Banach, A_0 un sous-anneau ouvert borné, $\varpi \in A_0$ une pseudo-uniformisante et $(u_i)_{i \in I}$ est soit une famille d'indéterminées, soit une famille d'éléments d'une A_0 -algèbre, on note $A_0\langle (u_i)_{i \in I} \rangle$ le séparé complété pour la topologie

⁽³⁾ C'est ce que Huber [14] appelle un *anneau de Tate complet*.

ϖ -adique de $A_0[(u_i)_{i \in I}]$ et on pose $A\langle(u_i)_{i \in I}\rangle = A_0\langle(u_i)_{i \in I}\rangle[1/\varpi]$ (indépendant du choix de A_0).

On note A^0 (resp. A^{00}) l'ensemble des éléments multiplicativement bornés (resp. topologiquement nilpotents) de A . Donc,

$$A^0 = \{a \in A \mid \exists C \in \mathbb{R} \text{ avec } |a^n| \leq C, \forall n\}, \quad A^{00} = \{a \in A \mid |a^n| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}.$$

Alors A^0 est un sous-anneau ouvert de A tandis que A^{00} est un idéal ouvert de A^0 . Ils sont tous les deux indépendants du choix de $|\cdot|$.

Un *anneau de Banach de type pm* est un anneau de Banach A tel que A^0 est borné. On voit facilement que ceci équivaut à l'existence d'une norme $|\cdot|$ définissant la topologie qui est *multiplicative pour les puissances*, i.e. telle que $|a^n| = |a|^n$ ($\forall a \in A, n \in \mathbb{N}$). Si $|\cdot|$ est ainsi, on a alors

$$A^0 = \{a \in A \mid |a| \leq 1\} \quad \text{et} \quad A^{00} = \{a \in A \mid |a| < 1\}.$$

Un anneau de Banach de type pm est réduit.

1. CORPS ET ALGÈBRES PERFECTOÏDES

1.1. Anneaux perfectoides

Dans toute la suite, p est un nombre premier fixé. Si R est un anneau de caractéristique p , on note $\varphi_R : R \rightarrow R$ le *Frobenius absolu*, i.e. l'application définie par $\varphi_R(x) = x^p$.

Un *anneau perfectoïde* est un anneau de Banach A de type pm qui admet une pseudo-uniformisante ϖ telle que $p \in \varpi^p A^0$ et que $\varphi_{A^0/\varpi^p A^0}$ est surjectif.

Si A est un anneau perfectoïde, une A -algèbre perfectoïde est une paire (B, ι) formée d'un anneau perfectoïde B et d'un homomorphisme continu $\iota : A \rightarrow B$. Avec comme morphismes les homomorphismes continus de A -algèbres, les A -algèbres perfectoides forment une catégorie.

Un *corps perfectoïde* est un anneau perfectoïde K qui est un corps et dont la topologie peut être définie par une *valeur absolue*, autrement dit une norme *multiplicative*, i.e. telle que $|ab| = |a| \cdot |b|$ ($\forall a, b \in K$)⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ On prendra donc garde qu'il est fort possible, bien que nous n'en connaissons pas d'exemple, qu'il existe une algèbre perfectoïde qui est un corps, sans pour autant être un corps perfectoïde. Les corps perfectoides jouent un rôle important en théorie de Hodge p -adique (dans [9], on les appelle des *corps strictement p -parfaits*). La terminologie « perfectoïde » est due à Scholze qui définit d'abord les corps perfectoides, puis les algèbres perfectoides sur un corps perfectoïde.

1.2. Exemples

1. Soit A un anneau de Banach de type pm de caractéristique p . Alors A est perfectoïde si et seulement s'il est parfait.
2. Soit K un corps complet pour une valeur absolue $|\cdot|$ telle que $|p| < 1$. Alors K est un corps perfectoïde si et seulement si ou bien K est parfait de caractéristique p , ou bien K est de caractéristique 0, l'inclusion $pK^0 \subset K^{00}$ est stricte et φ_{K^0/pK^0} est surjectif. C'est en particulier le cas lorsque K est algébriquement clos.
3. Soit A un anneau perfectoïde de caractéristique p et ϖ une pseudo-uniformisante. Alors le corps perfectoïde K complété de la clôture radicielle de $\mathbb{F}_p((\varpi))$ s'identifie à un sous-corps fermé de A et on peut considérer A comme une K -algèbre perfectoïde.

1.3. Basculement

Le *basculement* ou *tilting* ⁽⁵⁾ est un foncteur de la catégorie des anneaux perfectoïdes dans celle des anneaux perfectoïdes de caractéristique p :

Si A est un anneau perfectoïde, on note A^b l'ensemble des suites $a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant $(a^{(n+1)})^p = a^{(n)}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Si $a, b \in A^b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite des $(a^{(n+m)} + b^{(n+m)})^{p^m}$ tend vers une limite $(a + b)^{(n)}$ lorsque $m \rightarrow +\infty$. En outre $a + b = ((a + b)^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $ab = (a^{(n)}b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à A^b qui, muni de ces deux lois, devient un anneau parfait de caractéristique p .

Si $|\cdot|$ est une norme multiplicative pour les puissances sur A qui définit sa topologie, alors $|\cdot|^b : A^b \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, définie par $|a|^b = |a^{(0)}|$ est une norme multiplicative pour les puissances sur A^b , la topologie qu'elle définit ne dépend pas du choix de $|\cdot|$ et fait de A^b un anneau perfectoïde de caractéristique p .

Si A est de caractéristique p , l'application de A^b dans A qui envoie a sur $a^{(0)}$ est un homéomorphisme de A^b sur A qui permet d'identifier ces deux anneaux perfectoïdes.

Si A est un anneau perfectoïde et s'il existe une norme $|\cdot|$ sur A qui définit la topologie de A et est multiplicative, alors $|\cdot|^b$ est aussi multiplicative. En particulier, si K est un corps perfectoïde, K^b est un corps perfectoïde.

Soit ϖ une pseudo-uniformisante de A telle que $p \in \varpi A^0$. Si $a \in A^{b0} = (A^b)^0$, alors $a^{(n)} \in A^0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons a_n l'image de $a^{(n)}$ dans $A^0/\varpi A^0$. Alors $a_{n+1}^p = a_n$ pour tout n et l'application

$$\rho_{A,\varpi} : A^{b0} \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A^0/\varpi A^0 \quad (\text{avec } \varphi_{A^0/\varpi A^0} \text{ comme application de transition}),$$

qui envoie $a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, permet d'identifier l'anneau topologique A^{b0} à cette limite projective (avec la topologie discrète sur chaque terme).

⁽⁵⁾ Ici encore on adopte la terminologie et la notation de Scholze. Cette vieille construction de la théorie de Hodge p -adique n'avait pas été baptisée jusqu'ici.