Bulletin de la S. M. F.

Benali Benzaghou
Jean-Paul Bézivin

Propriétés algébriques de suites différentiellement finies

Bulletin de la S. M. F., tome 120, nº 3 (1992), p. 327-346
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_3_327_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 327–346.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE SUITES DIFFÉRENTIELLEMENT FINIES

PAR

BENALI BENZAGHOU ET JEAN-PAUL BEZIVIN (*)

RÉSUMÉ. — On dit qu'une suite $u(n)$, à valeurs dans un corps commutatif K est récurrente linéaire si la série génératrice $f(x) = \sum u(n)x^n$ est une fraction rationnelle, et différentiellement finie si $f(x)$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients dans $K[x]$. Dans cet article, nous nous intéressons aux problèmes de caractériser les suites $u(n)$ différentiellement finies telles que $1/u(n)$ le soit aussi, et les suites $u(n)$ différentiellement finies vérifiant une équation polynômiale à coefficients suites récurrentes linéaires.

ABSTRACT. — We say that the sequence $u(n)$ of elements of a commutative field K is a linear recurrent sequence if the generating function $f(x) = \sum u(n)x^n$ is a rational function, and differentially finite if $f(x)$ satisfy a linear homogeneous differential equation with coefficients in $K[x]$. In this paper, we study the problem of finding the differentially finite sequence $u(n)$ such that $1/u(n)$ is also differentially finite, and the differentially finite sequences that satisfy a polynomial equation with linear recurrent sequences coefficients.

1. Introduction et Notations

Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle et $u(n)$ une suite d'éléments de K. Nous dirons que $u(n)$ est une *suite récurrente linéaire* si elle vérifie une relation de récurrence de la forme

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{t} a_i u(n+i) = 0$$

pour n assez grand, les a_i étant des constantes de K non toutes nulles. Il est bien connu qu'une telle suite admet, pour n assez grand, une expression

(*) Texte reçu le 28 mars 1991, révisé le 29 octobre 1991.
J.-P. BEZIVIN, Université de Caen, Département de Mathématique et de Mécanique, 14032 Caen Cedex.
B. BENZAGHOU, Université H. Boumediene, Mathématiques, El Alia, B.P. n° 32, Bab Ezzouar, Alger (Algérie).

de la forme

$$u(n) = \sum_{1}^{s} P_i(n)\alpha_i^n. \tag{2}$$

où les α_i sont des éléments non nuls d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, et les P_i des polynômes non nuls de $\overline{K}[X]$.

A une telle suite $u(n)$, on associe sa série génératrice $f(x) = \sum u(n)x^n$ qui est la série formelle à coefficients dans K. Dire que $u(n)$ est une suite récurrente linéaire est alors équivalent à dire que la série $f(x)$ est la série de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle ; c'est pourquoi nous notons l'ensemble des suites récurrentes linéaires par $R(K)$.

On parle aussi, en raison de l'expression (2), de polynômes exponentiels pour les suites récurrentes linéaires. Une partie de $R(K)$ est formée des sommes exponentielles ; ce sont les éléments de $R(K)$ tels que dans l'expression (2), les polynômes P_i soient des constantes non nulles.

Nous noterons $S(K)$ cette partie de $R(K)$; sur la série génératrice f, l'appartenance de $u(n)$ à $S(K)$ signifie que la fraction rationnelle f n'a que des pôles simples dans une clôture algébrique de K.

Nous aurons besoin aussi de la notion de suite différentiellement finie ou D-finie ; une telle suite sera une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\sum_{i=0}^{t} Q_i(n)u(n+i) = 0 \tag{3}$$

pour n assez grand, avec $Q_i \in K[X]$ pour tout i.

Il est équivalent de dire que la série génératrice $f(x)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes, d'où cette appelation, introduite par STANLEY dans [11].

Nous noterons $J(K)$ l'ensemble de ces suites. Enfin, nous introduisons une dernière classe de suites d'éléments de K, que nous appellerons *suites algébriques* ; ce sont les suites $u(n)$ d'éléments de K telles que la série génératrice $f(x)$ soit une série algébrique sur $K(X)$, c'est-à-dire vérifie une équation $P(x, f(x)) = 0$ où $P(X,Y)$ est un polynôme non nul de $K[X,Y]$.

Nous noterons $A(K)$ ce dernier ensemble. On a $S(K)$ inclus dans $R(K)$, $R(K)$ inclus dans $A(K)$ et enfin $A(K)$ inclus dans $J(K)$. Il est bien connu que $J(K)$ est un anneau commutatif non intègre pour les opérations usuelles sur les suites ; il en est de même de $S(K)$ et de $R(K)$, mais pas de $A(K)$. Cependant, le produit d'une suite de $A(K)$ par une suite de $R(K)$ est encore dans $A(K)$, comme on s'en rend compte aisément en utilisant la formule (2).

Le produit usuel $w(n) = u(n)v(n)$ de deux suites $u(n)$ et $v(n)$ est encore appelé *produit de Hadamard*, car le produit défini sur l'ensemble des séries formelles par $f * g = \sum u(n)v(n)x^n$ si $f = \sum u(n)x^n$ et $g = \sum v(n)x^n$ a été introduit et étudié par HADAMARD pour ses bonnes propriétés vis à vis des singularités des séries f, g, $f * g$ quand le corps de base est $\mathbb{C}$.

Les propriétés algébriques de $S(K)$ et $R(K)$ ont été étudiées depuis longtemps, et sont assez bien connues (voir [1], [5], [7], [8]). Par contre, en ce qui concerne les suites D-finies, on connaît bien moins de résultats, voir l'article [11] déjà cité.

Dans cet article, nous allons examiner un certain nombre de problèmes dans $J(K)$, analogues aux problèmes résolus dans $R(K)$, et aussi les relations entre éléments de $J(K)$ et $R(K)$. Dans chaque partie, nous ferons si nécessaire une brève introduction indiquant ce qui est connu dans le cas de $R(K)$.

Nous utiliserons assez largement des outils d'analyse complexe, de sorte que nous supposons désormais $K = \mathbb{C}$. Mais comme on le voit facilement, pour toute suite $u(n)$ de $J(K)$, il existe un sous-corps K_0, de type fini sur $\mathbb{Q}$, tel que $u(n)$ appartienne à $J(K_0)$; par suite, pour des propriétés algébriques, on peut toujours considérer que l'on s'est placé dans $\mathbb{C}$, de sorte que supposer $K = \mathbb{C}$ ne nuit pas à la généralité des énoncés.

2. Suites de $J(K)$ vérifiant une relation de dépendance algébrique

Dans cette partie, nous considérons les suites D-finies qui vérifient une relation de dépendance algébrique sur les suites polynômes en la variable n. Nous aurons besoin d'une définition.

Définition 2.1. — On dit qu'une suite $u(n)$ est un *emboîtement* de suites fractions rationnelles s'il existe un entier naturel positif d tel que, pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, il existe une fraction rationnelle $F_r(X)$ dans $\mathbb{C}(X)$ telle que $u(kd + r) = F_r(k)$ pour tout k assez grand.

Une suite $u(n)$ qui est un emboîtement de suites fractions rationnelles est D-finie, et aussi vérifie une relation de dépendance algébrique sur les suites polynômes en la variable n ; on vérifie en effet facilement que :

$$w(n) = \prod_{r=0}^{d-1} \Big[u(n) - F_r\Big(\frac{n-r}{d}\Big)\Big]$$

est une suite nulle à partir d'un certain rang.

Nous allons démontrer que la réciproque est vraie :

THÉORÈME 1. — *Soit $u(n)$ une suite D-finie, vérifiant $P(n, u(n)) = 0$, où :*

$$P(X, Y) = \sum_0^t A_j(X) Y^j \in \mathbb{C}[X, Y]$$

n'est pas nul. Alors $u(n)$ est un emboîtement de suites fractions rationnelles.

Démonstration. — On ne peut pas supposer que $P(X, Y)$ est irréductible, car $J(\mathbb{C})$ n'est pas intègre. Nous pouvons cependant supposer que $P(X, Y)$ n'a pas de facteurs multiples.

Considéré comme équation en la variable z, $P(z, Y) = 0$ définit au voisinage de l'infini des fonctions algébriques $\psi_1, \ldots, \psi_t$ qui seront donc distinctes.

On a par hypothèse, pour n assez grand, l'égalité :

$$\prod_1^t \bigl(u(n) - \psi_j(n)\bigr) = 0 \qquad (n \geq N_0). \tag{4}$$

Quitte à supposer n un peu plus grand, on peut supposer aussi que $\psi_j(n) \neq \psi_i(n)$ si $i \neq j$, $n \geq N_0$. Nous supposerons aussi que pour tout i, il existe une infinité de valeurs de n telles que $u(n) = \psi_i(n)$.

Puisque la suite $u(n)$ est dans $J(\mathbb{C})$, on a une relation non triviale de la forme :

$$\sum_0^s H_j(n) u(n + j) = 0 \quad \text{pour } n \text{ assez grand, avec} \quad H_0 H_s \neq 0.$$

Nous supposerons $H_0(n) H_s(n) \neq 0$ pour $n \geq N_0$. Ces réductions étant faites, pour tout $n \geq N_0$, il existe d'après (4) un entier $\ell \in \{1, \ldots, t\}$, déterminé de façon unique, tel que $u(n) = \psi_\ell(n)$; nous notons $\ell(n)$ cet entier.

Posons $\omega(n) = (\ell(n), \ldots, \ell(n + s))$ pour $n \geq N_0$.

L'application ω est à valeurs dans l'ensemble fini $\{1, \ldots, t\}^{s+1}$.

Soit ω_0 un élément de cet ensemble qui est atteint une infinité de fois, $\omega_0 = (\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_s)$ et soit $A = \{n, n \geq N_0, \omega(n) = \omega_0\}$, ensemble que nous notons aussi $\{n_k \,;\ k \geq 1\}$.

Soit $\varphi(z)$ la fonction algébrique définie par :

$$\varphi(z) = \sum_0^s H_j(z) \psi_{\ell_j}(z + j).$$