OPÉRATEURS GÉOMÉTRIQUES, INVARIANTS CONFORMES ET VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT HYPERBOLIQUES

Zindine Djadli & Colin Guillarmou & Marc Herzlich

Panoramas et Synthèses

Numéro 26

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

PANORAMAS ET SYNTHÈSES

OPÉRATEURS GÉOMÉTRIQUES, INVARIANTS CONFORMES ET VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT HYPERBOLIQUES

Zindine Djadli
Colin Guillarmou
Marc Herzlich

Société Mathématique de France 2008
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Zindine Djadli
Institut Fourier, U.M.R. 5582 CNRS – Université Grenoble I, France.
E-mail : `Zindine.Djadli@ujf-grenoble.fr`

Colin Guillarmou
Laboratoire J.A. Dieudonné,
U.M.R. 6621 CNRS – Université de Nice-Sophia Antipolis, France.
E-mail : `Colin.Guillarmou@unice.fr`

Marc Herzlich
Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier,
U.M.R. 5149 CNRS – Université Montpellier II, France.
E-mail : `Marc.Herzlich@math.univ-montp2.fr`

27 octobre 2008

OPÉRATEURS GÉOMÉTRIQUES, INVARIANTS CONFORMES ET VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT HYPERBOLIQUES

Zindine Djadli, Colin Guillarmou, Marc Herzlich

Résumé. — En 1985, Fefferman et Graham ont introduit un programme ambitieux (dit de la « métrique ambiante ») d'étude des invariants locaux de la géométrie conforme. Celui-ci s'est considérablement développé ces dernières années, menant à la définition de nombreux objets nouveaux : opérateurs de Graham-Jenne-Mason-Sparling (GJMS) généralisant ceux de Yamabe et de Paneitz, Q-courbure de Branson... et à des applications parfois spectaculaires et inattendues : classification des variétés conformément plates de dimension 4 à caractéristique d'Euler positive, théorème « de pincement conforme » de la sphère, etc. Absentes de la stratégie originelle, la géométrie et l'analyse sur les variétés asymptotiquement hyperboliques d'Einstein (ou Poincaré-Einstein) se sont révélées un élément essentiel du programme. L'objectif de ce livre est de présenter un panorama des développements récents et une synthèse des principaux résultats, accessible à des lecteurs ayant une connaissance de base de la géométrie riemannienne.

Abstract **(Geometric operators, conformal invariants and asymptotically hyperbolic manifolds)**

In 1985, Fefferman and Graham initiated an ambitious program of study of conformal geometry (known as the "ambient metric" method). This has known tremendous developments in the last few years, leading to the definition of a number of new invariants: Graham-Jenne-Mason-Sparling (GJMS) operators generalizing the Yamabe and Paneitz operators, Branson Q-curvatures... and to remarkable applications to conformally flat manifolds of dimension 4 and nonnegative Euler characteristic, or to conformally invariant pinching theorems. An essential role is played in the theory by asymptotically hyperbolic Einstein metrics (or Poincaré-Einstein metrics) associated to a conformal class. The book is devoted to a presentation of the theory together with a description of the latest developments. It should be accessible to all readers having a basic knowledge of Riemannian geometry.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce texte est issu de la session *Etats de la Recherche* « Opérateurs géométriques et géométrie conforme » organisée par la Société mathématique de France à l'université de Cergy-Pontoise du 12 au 14 Juin 2006. Trois mini-cours de 4 heures avaient été donnés lors de cette session :

- *Géométrie conforme et opérateurs invariants conformes en dimension* 4, par Zindine Djadli ;
- *Invariants conformes en théorie de la diffusion*, par Colin Guillarmou ;
- *Métriques asymptotiquement hyperboliques d'Einstein et géométrie conforme*, par Marc Herzlich.

Le présent ouvrage constitue une version enrichie des trois mini-cours. Compte-tenu de l'étroite interdépendance des différents sujets abordés, nous avons choisi de produire un seul texte rassemblant les trois contributions. Lors de la tenue de la session à Cergy, les mini-cours avaient été accompagnés de cinq conférences plus spécialisées, qui n'ont pas été rédigées.

Le fil directeur de ce livre est la géométrie conforme, et plus particulièrement ses interactions avec l'analyse. Il s'agit d'un sujet très vaste, et il a bien sûr été nécessaire de faire un choix parmi les thèmes que nous souhaitions traiter. Nous avons choisi de tenter d'expliquer quelques résultats autour d'un sujet en plein développement depuis quelques années : le lien entre géométrie conforme et géométrie des variétés asymptotiquement hyperboliques, dû à l'origine à Fefferman et Graham [**57**]. L'interêt qu'il suscite est à la fois lié à son pendant physique : la correspondance AdS/CFT de Maldacena [**111**], mais aussi à l'efficacité de ce point de vue pour aborder la géométrie conforme. Ce dernier, hérité d'Elie Cartan, repose sur la correspondance entre une structure conforme d'une variété compacte et la structure riemannienne près de l'infini d'une variété non-compacte à courbure de Ricci asymptotiquement négative constante (d'où la terminologie *asymptotiquement hyperbolique d'Einstein* ou AHE), dont une compactification conforme a pour bord M. L'exemple fondamental est évidemment la sphère cannonique $\mathbb{S}^n$, qui est le bord de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ vue comme l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}$ ayant $-n$ pour courbure de Ricci, et chacun sait par exemple que le groupe conforme de $\mathbb{S}^n$ est identifié au groupe d'isométries de $\mathbb{H}^{n+1}$.

Le premier aspect attractif de cette correspondance est que l'on connaît mieux les invariants riemanniens que les invariants conformes, il est donc avantageux de partir du cadre riemannien sur la variété AHE non-compacte pour en déduire des informations conformes sur le bord conforme à l'infini. Un autre intérêt de cette correspondance est que certains problèmes d'analyse spectrale du laplacien sur la variété AHE sont liés à des opérateurs différentiels invariants conformes sur le bord à l'infini. Ces nouveaux opérateurs conformes généralisent le laplacien conforme (ou laplacien de Yamabe) et induisent de nouvelles notions de courbure, nommées *Q-courbures* par Branson [**28**] qui en a découvert le premier exemple. La Q-courbure joue un rôle analogue en dimension $2n$ à celui que joue la courbure scalaire (c'est-à-dire, en réalité, la courbure de Gauss) en dimension 2. Elle mesure les aspects conformes de l'intégrand de la formule de Chern-Gauss-Bonnet (*i.e.* le pfaffien). Elle conduit par ailleurs naturellement à la question de l'uniformisation des variétés conformes de dimension paire : « existe-t-il une métrique dans chaque classe conforme dont la Q-courbure soit constante ? » Ce problème généralise l'uniformisation des surfaces et le problème de Yamabe pour la courbure scalaire en dimension supérieure. Ces derniers ayant permis de développer des outils analytiques considérables pour la résolution d'EDP elliptiques non linéaires d'ordre 2, il était naturel d'espérer beaucoup de ces problèmes d'ordre supérieur, à la fois sur le plan analytique mais aussi sur le plan géométrique, en particulier en dimension 4 où l'uniformisation de la Q-courbure et l'étude de l'opérateur associé (appelé opérateur de *Paneitz*) ont eu de nombreuses applications en géométrie conforme.

Le développement récent des connaissances, aussi bien que nos goûts personnels, nous ont donc conduit à privilégier les trois aspects suivants :

(i) la construction de nouveaux invariants conformes via l'étude des métriques asymptotiquement hyperboliques d'Einstein (AHE), suivant en cela des idées dues à l'origine à Fefferman et à Graham, qui se sont révélées extrêmement puissantes pour mettre au jour ces *nouveaux invariants conformes* ;

(ii) l'étude en dimension 4 du cas particulier le plus important de ces opérateurs différentiels, l'*opérateur de Paneitz*. Notre étude se focalisera aussi bien sur l'aspect analytique (généralisation du problème de Yamabe à cette situation) que sur quelques applications frappantes : théorèmes de classification et de rigidité liés à la Q-courbure ;

(iii) une étude de la théorie spectrale du laplacien sur les variétés AHE, à travers la théorie de la diffusion géométrique de Melrose. Cela nous conduira tout d'abord aux liens établis par Graham et Zworski [**74**] entre l'opérateur de diffusion sur les variétés AHE et les opérateurs invariants conformes décrits plus haut. Afin de motiver ces considérations, nous décrirons également quelques résultats faisant intervenir les fonctions ζ de Selberg dans le cas où la variété AHE est une variété hyperbolique convexe cocompacte $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$. Les fonctions ζ sont des objets de nature principalement dynamique (elles sont définies comme des produits infinis sur l'ensemble des géodésiques fermées de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$) mais l'influence de la géométrie conforme de l'infini y sera perceptible.

Au sein de cet ensemble de sujets, les auteurs ont préféré privilégier la diversité plutôt que l'exhaustivité (quitte même parfois à s'éloigner de la géométrie conforme). L'objectif était pour nous de présenter un panorama, que nous espérons attirant, des recherches actuelles sur le sujet, en donnant envie au lecteur de plonger par lui-même dans les articles les plus marquants. On trouvera donc ici peu de preuves complètes (à l'exception des propriétés les plus élémentaires), et certains points seront traités avec brièveté, voire ne seront qu'effleurés.

Le plan de l'ouvrage est le suivant : ce chapitre d'introduction se poursuit par une rapide présentation de l'objet modèle de la géométrie conforme : la sphère de Möbius, qui servira de fil d'Ariane tout au long de ce texte. Dans un second temps, on introduit le cadre géométrique, celui des métriques « asymptotiquement hyperboliques d'Einstein » (parfois appelées Poincaré-Einstein, voir la suite pour une discussion terminologique) attachées à une variété conforme, ainsi que leurs compagnes connues sous le nom de « métriques ambiantes » .

Le deuxième chapitre est consacré à une étude précise de la structure de ces métriques au voisinage de l'infini. Le résultat le plus important qui y est obtenu est une écriture explicite d'un développement asymptotique. Cela permet de faire le lien entre elles et la géométrie locale de la variété conforme placée à l'infini. Il est suivi d'un court troisième chapitre présentant quelques applications faciles de ces constructions (construction de nouveaux invariants conformes) ainsi qu'un rapide survol de quelques résultats récents de toute première importance concernant la classification des invariants conformes scalaires.

Le chapitre 4 introduit l'outillage nécessaire pour la construction d'intégrales renormalisées. Les variétés que nous considérons étant non-compactes, l'obtention d'invariants par simple intégration d'une fonction ne va pas de soi. C'est la structure très régulière de la métrique à l'infini qui vient alors à notre secours. Deux applications sont proposées : la construction du volume renormalisé des métriques AHE (une incursion en-dehors du territoire de la géométrie conforme proprement dite), et un théorème de Gauss-Bonnet, interpreté de façon géométrique puis sous forme de théorème d'indice.

Le cinquième chapitre est consacré à la diffusion géométrique sur les variétés asymptotiquement hyperboliques, c'est-à-dire à l'analyse du spectre continu du laplacien. Il se conclut par la construction d'une famille d'opérateurs pseudo-différentiels covariants conformes sur l'infini conforme de ces variétés : l'opérateur de diffusion.

Le sixième chapitre permet un retour à la géométrie. On y explique la construction de Graham-Jenne-Mason-Sparling (GJMS)[**71**] d'une famille d'opérateurs différentiels scalaires invariants conformes à l'aide de la métrique ambiante. Ces opérateurs généralisent ceux, bien connus, de Yamabe et de Paneitz et sont naturellement reliés aux Q-courbures mises au jour par Branson. On décrit alors les résultats de Graham-Zworski liant les résidus de l'opérateur de diffusion en certains points et ces nouveaux opérateurs différentiels invariants conformes. En guise d'application, on explicite le lien entre l'intégrale de la Q-courbure et le développement asymptotique du volume d'une variété AHE, en suivant les travaux de Graham-Hirachi, Chang-Qing-Yang et Albin.

Les chapitres 7 est celui consacré à la dimension 4. Son objectif est de montrer que la connaissance des opérateurs GJMS et des courbures associées a un intérêt géométrique direct. Le lecteur y trouvera une étude analytique fouillée de l'opérateur le plus important de la famille en dimension 4 : l'opérateur de Paneitz, ainsi que de problèmes variationnels associés. Ces résultats seront ensuite utilisés pour obtenir des conséquences géométriques remarquables, dues essentiellement à Chang, Gursky, Viaclovsky et Yang : bornes sur la fonctionnelle qui associe à toute métrique riemannienne l'intégrale de la norme de sa courbure de Weyl au carré et caractérisation des cas d'égalité, classification des variétés conformément plates à courbure scalaire strictement positive et caractéristique d'Euler positive, théorème de pincement conforme...

Le chapitre 8 est une extension de certains résultats des chapitres précédents au territoire des variétés riemanniennes mesurées, c'est-à-dire dotées d'une mesure qui diffère de la mesure riemannienne canonique. En suivant les travaux de Chang-Gursky-Yang, on y introduit les concepts de courbure de Ricci et de courbure scalaire conformément covariante, et quelques applications, ainsi que le lien avec les tenseurs de Ricci-Bakry-Emery et de Perelman.

Le neuvième chapitre revient sur la notion de métrique ambiante, et décrit le lien entre celle-ci et un autre point de vue classique sur la géométrie conforme, celui des connexions de Cartan, en suivant les idées de Čap-Gover. Un autre objectif est de montrer comment le cadre « AHE/ambiant », extrêmement fructueux sur le plan théorique, peut être relié à celui des connexions de Cartan sur le fibré dit des « tracteurs », très efficace pour des calculs effectifs.

Le livre se conclut par un chapitre 10 de nature plus analytique, qui permet de relier invariants spectraux sur X et invariants conformes sur le bord, en particulier dans le cadre des variétés hyperboliques convexes cocompactes où la fonction ζ de Selberg joue un rôle important.

Remerciements. Les auteurs remercient tous ceux qui à différents titres ont permis la tenue de la session *Etats de la Recherche* sur ce thème à l'université de Cergy-Pontoise. Nous pensons en particulier à Eric Leichtnam, qui a proposé au premier auteur de l'organiser, à Thierry Coulhon, président de l'université de Cergy-Pontoise, qui a mis à la disposition de tous les participants des moyens matériels, humains et financiers pour que cette rencontre soit un succès, à Véronique Raoult et tout le service communication de l'université, à la Société mathématique de France, et enfin à Amina Abdelmoumène, dont l'aide précieuse et infaillible a été indispensable. La session avait également bénéficié du soutien financier du C.N.R.S., de la communauté d'agglomération de Cergy-Pontoise et du laboratoire de mathématiques de l'université de Cergy-Pontoise. Merci ensuite à tous les participants et à Jacques Lafontaine, dont les réactions, commentaires et suggestions ont grandement aidé la rédaction. Les auteurs remercient Aude Girard pour la relecture impitoyable de la version finale de ce texte. Enfin nous sommes reconnaissants au referee pour sa lecture incroyablement attentive de la première version de cet ouvrage.

1.1. La sphère conforme et l'espace hyperbolique

1.1.1. Définition. — La *sphère de Möbius* $\mathbb{S}$ est la variété des droites isotropes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+2}$ muni de la forme quadratique (métrique lorentzienne de Minkowski)

$$\gamma = -(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + \cdots + (dx_{n+1})^2.$$

La variété $\mathbb{S}$, qui est une quadrique projective, est donc difféomorphe à une sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension n. Son espace tangent en une droite isotrope x est

$$T_x\mathbb{S} = \mathrm{Hom}(x, x^\perp/x) = x^* \otimes x^\perp/x,$$

où une droite isotrope voisine de x est vue comme un graphe au-dessus de x, et où l'orthogonal est celui relatif à la métrique γ.

Structure conforme naturelle de la sphère de Möbius. — La métrique γ passe naturellement au quotient $x^\perp/x$ et y fournit un produit scalaire défini positif, en vertu du résultat facile suivant : les seuls éléments isotropes de $x^\perp$ sont les éléments de x (qui est laissé en exercice au lecteur). De plus,

$$T_x^*\mathbb{S} = (x^\perp/x)^* \otimes x\ ,$$

et donc

$$\mathrm{Sym}^2(T_x^*\mathbb{S}) = \mathrm{Sym}^2(x^\perp/x)^* \otimes x^2$$

où x^2 désigne le carré du fibré en droites tautologique sur $\mathbb{S}$, c'est-à-dire $x \otimes x$. Dès lors, tout choix de section jamais nulle du dual x^* du fibré tautologique donne naissance à une section définie positive du fibré des formes quadratiques sur le fibré tangent de $\mathbb{S}$, c'est-à-dire une structure conforme (famille de métriques riemanniennes proportionnelles).

1.1.2. Remarque. — Restreint à la variété $\mathbb{S}$, le fibré tautologique est trivial, il possède donc de nombreuses sections jamais nulles (contrairement à ce qui se passe sur le projectif tout entier).

Il reste à comprendre en quoi cette structure conforme est bien la structure canonique, celle de la sphère ronde. Le lien est effectué en choisissant une forme linéaire e_0 de type temps sur l'espace de Minkowski (autrement dit en choisissant une décomposition orthogonale $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n+1}$ où le premier facteur est de signature négative : e_0 n'est alors rien d'autre que la première fonction coordonnée). La sphère de Möbius est alors identifiée à l'intersection du cône isotrope avec l'hyperplan affine $e_0^{-1}(1)$, elle-même identifiée à une sphère de rayon 1 dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ (le point correspondant à la droite isotrope x sera noté $\hat{x}$). La forme linéaire e_0 induit une section jamais nulle de x^* par

$$v \in x \longmapsto e_0(v)$$

qui trivialise le fibré tautologique x et permet d'identifier le fibré tangent à $\mathbb{S}$ en x à l'hyperplan de $\{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à $\hat{x}$

$$T_x\mathbb{S} = \hat{x}^{\perp} .$$

La métrique riemannienne obtenue sur $\mathbb{S}$ via ce choix de section est donc la métrique ronde de la sphère. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter l'article fondateur de Kuiper [**96**].

Pour conclure cette partie, il faut noter que le groupe des isométries conformes de $\mathbb{S}$ est le *groupe de Möbius*

$$\text{Möb}(n) = O(n+1,1)/\{\pm 1\}$$

que l'on peut identifier au groupe des isométries lorentziennes temporellement orientées $O^{\uparrow}(n+1,1)$ (attention, ce groupe a deux composantes connexes : la composante $SO_0(n+1,1)$ de l'identité, formée des isométries conformes préservant l'orientation, et celle des isométries conformes ne préservant pas l'orientation).

La géométrie hyperbolique. — Il est bien connu que la géométrie conforme de la sphère canonique $\mathbb{S}^n$ est intimement liée à la géométrie de l'espace hyperbolique(1). L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}$ est alors vu comme la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes défini par l'équation

$$-(z_0)^2 + (z_1)^2 + ... + (z_{n+1})^2 = -1$$

dans $\mathbb{R}^{n+2}$ muni de la métrique de Minkowski, et la sphère de Möbius apparaît comme sa *sphère à l'infini.* Afin d'expliciter ce lien, introduisons dans le cône supérieur (plein)

$$-(z_0)^2 + (z_1)^2 + ... + (z_{n+1})^2 < 0, \quad z_0 > 0$$

(1)Pour cette raison, il est plus intéressant d'étudier ici l'espace hyperbolique de dimension $n+1$ et non n.

les coordonnées « hyperboliques »

$$z_0 = u \cosh s, \quad \sqrt{(z_1)^2 + ... + (z_{n+1})^2} = u \sinh s,$$

il est alors facile de voir que la métrique de Minkowski devient

$$\gamma = -du^2 + u^2(ds^2 + (\sinh s)^2 g_c) \tag{1.1.1}$$

où g_c est la métrique ronde sur la sphère. L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}$ est donc l'hypersurface $\{u = 1\}$, avec métrique

$$g = ds^2 + (\sinh s)^2\, g_c, \tag{1.1.2}$$

qui est donnée ici sous forme géodésique. Il s'agit donc d'un espace à courbure constante égale à -1, et le groupe de ses isométries (directes) est clairement isomorphe à $SO_0(n+1,1)$.

Une façon commode de concevoir les liens entre la métrique hyperbolique et la structure conforme de la sphère $\mathbb{S}^n$ placée « à l'infini » est de considérer la classe conforme de la sphère comme la limite de la suite de métriques *renormalisées* sur les grandes sphères géodésiques

$$\lim_{s\to\infty} \varphi^{-2}\, g_{|S_s}$$

où φ est n'importe quelle fonction dont la croissance est de l'ordre de e^s au voisinage de l'infini. Bien entendu, la liberté laissée dans le choix de la fonction φ montre qu'on ne peut récupérer mieux qu'une structure conforme à l'infini. Il s'agit de la manière la plus élémentaire (mais aussi l'une des plus géométriques) de faire apparaître la sphère comme le bord à l'infini de l'espace hyperbolique.

Un autre modèle de la métrique hyperbolique g qui est bien adapté à ce point de vue est celui de la boule : il est obtenu en posant $v = \tanh \frac{s}{2}$; l'espace hyperbolique est alors envoyé sur la boule ouverte de rayon 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$, munie de la métrique

$$g = \frac{4}{(1-v^2)^2}\, \mathrm{eucl},$$

où v est la distance euclidienne entre l'origine et le point de calcul. La sphère de rayon 1 est donc le « bord à l'infini » de $\mathbb{H}^{n+1}$, *i.e.* le bord de la compactification géodésique naturelle de $\mathbb{H}^{n+1}$, et la structure conforme de $\mathbb{S}^n$ est donnée par la classe conforme de

$$h_0 = \lim_{v\to 1}\, (1-v^2)^2 g_{|S_v}.$$

Nous aurons encore besoin de considérer deux autres systèmes de coordonnées, qui joueront un rôle fondamental pour le reste de l'ouvrage.

Métrique hyperbolique en coordonnées géodésiques à l'infini. — Le premier consiste à poser $x = \mathrm{e}^{-s}$ (pour $s >> 1$) dans la formule (1.1.2) de la métrique hyperbolique en coordonnées géodésiques. De cette manière, un voisinage de l'infini devient alors difféomorphe au collier $(0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^n$ muni de la métrique

$$g = x^{-2}\left(dx^2 + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 g_c\right).$$

Il est alors clair que, sur les directions transverses à dx,

$$[g_c] = \lim_{x\to 0} x^2[g],$$

en tant que classes conformes. Ce système de coordonnées est caractérisé par le fait que le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$ est de norme constante égale à 1 pour la métrique $x^2 g$, métrique qui se prolonge de manière lisse au bord à l'infini[(2)]. Autrement dit, les courbes intégrales de ce champ de vecteurs sont des géodésiques orthogonales au bord.

Métrique de Minkowski en coordonnées ambiantes. — Le second système de coordonnées est un système adapté pour l'espace de Minkowski. Il est obtenu, par exemple, à partir des coordonnées précédentes : de fait, la métrique lorentzienne plate s'écrit

$$\gamma = -du^2 + \frac{u^2}{x^2}\left(dx^2 + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 g_c\right),$$

et on peut alors poser dans le cône supérieur

$$t = ux^{-1}, \quad \rho = -\frac{x^2}{2},$$

de telle sorte que la métrique de Minkowski se lise (toujours dans le cône supérieur plein)

$$\gamma = 2t\,dtd\rho + 2\rho\,dt^2 + \frac{t^2}{4}(1+2\rho)^2 g_c. \tag{1.1.3}$$

Cette forme de la métrique[(3)] présente plusieurs avantages sur la forme hyperbolique (1.1.1) de la métrique de Minkowski, pourtant plus classique :

(i) elle se prolonge par continuité au-delà de $\{\rho = 0\}$, qui n'est autre que le cône isotrope $\{-(z_0)^2 + (z_1)^2 + ... + (z_{n+1})^2 = 0\}$, fournissant ainsi une expression valable dans tout un voisinage du cône isotrope ;

(ii) elle rend compte de façon explicite du caractère *isotrope* du cône, puisque sa restriction s'y exprime comme la métrique dégénérée $\frac{t^2}{4}\,g_c$;

---

(2) Attention, la métrique induite au bord est celle d'une sphère de courbure 4...

(3) que l'on retrouve facilement à partir des coordonnées cartésiennes usuelles en posant

$$t = z_0 + |z'|, \quad \rho = \frac{z_0 - |z'|}{z_0 + |z'|}.$$

où on a noté $z' = (z_1, ..., z_{n+1})$.