Astérisque

JEAN-YVES CHEMIN

Fluides parfaits incompressibles

Astérisque, tome 230 (1995)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__230__1_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

230 ASTÉRISQUE

1995

FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

Jean-Yves CHEMIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Classification AMS : 35L60, 35S50, 42B20, 76A05.

Table des Matières

Introduction **3**

1 Présentation des équations **7**

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide parfait ? 7
1.2 De Lagrange à Euler 10
1.3 Le tourbillon, la pression et la dimension 2. 14
1.4 Références et remarques 20

2 Théorie de Littlewood-Paley **21**

2.1 Découpage dyadique 21
2.2 Espaces de Sobolev 25
2.3 Espaces de Hölder 30
2.4 Calcul paradifférentiel 35
2.5 La pression et son champ de gradient. 40
2.6 Références et remarques 46

3 Autour de la loi de Biot-Savart **47**

3.1 Estimations L^p 47
3.2 Estimations L^∞ : quelques exemples 50
3.3 Opérateurs de Riesz et fonctions bornées 54
3.4 Références et remarques 63

4 Cas d'une donnée initiale régulière **65**

4.1 Résolution d'un problème modèle 65
4.2 Retour à l'équation d'Euler 76
4.3 Références et remarques 82

5 Quand le tourbillon est borné **83**

5.1 Le théorème de Yudovitch 83
5.2 Sur les équations différentielles ordinaires 87
5.3 Un exemple 91
5.4 Le problème des poches de tourbillon 93
5.5 Démonstration de la persistance 94
5.6 Références et remarques 102

6 Les nappes de tourbillon **105**

6.1 Présentation de la problématique 105
6.2 Etude de la fonction G 107
6.3 Passage à la limite 108
6.4 Références et remarques 113

7 Le front d'onde et le produit **115**

7.1 Présentation du front d'onde 115
7.2 Quand peut-on définir un produit ? 121
7.3 Front d'onde analytique et Gevrey 125
7.4 Références et remarques 133

8 Analyticité et régularité Gevrey **135**

8.1 Enoncés des théorèmes 135
8.2 Opérateurs multilinéaires 136
8.3 Régularité le long des lignes de flot 143
8.4 Références et remarques 149

9 Poches de tourbillon singulières **151**

9.1 Présentation du problème 151
9.2 Théorie de Littlewood-Paley locale 155
9.3 Dynamique des poches singulières 162

Bibliographie **173**

Introduction

L'objet de ce livre est d'offrir un texte qui démontre quelques résultats récents ou nouveaux de mécanique des fluides. Ce texte se veut autocontenu pour un étudiant de maîtrise n'ayant point fui l'Analyse. Le premier résultat est le théorème de J.-M. Delort sur l'existence d'une solution aux équations d'Euler en dimension deux pour une donnée initiale du type nappe de tourbillon. Les autres résultats sont des théorèmes affirmant la persistance de la régularité du bord d'une poche de tourbillon. Le texte est divisé en neuf chapitres dont nous allons brièvement résumer le contenu.

Le premier chapitre est une description succinte des concepts de base liés aux équations d'Euler relatives à un fluide parfait incompressible. Tout d'abord, nous définissons un tel fluide en lui imposant d'évoluer le long d'une géodésique du groupe des difféomorphismes préservant la mesure.

Ensuite, traduisant cette définition lagrangienne en langage eulérien, nous établissons les équations d'Euler vérifiées par le champ des vitesses des particules du fluide. Puis, les quantités importantes liées à ces équations (pression, tourbillon) sont introduites. La loi fondamentale de Biot-Savart reliant un champ de vecteurs de divergence nulle à son rotationnel est démontrée. Enfin, la spécificité de la dimension deux d'espace est mise en évidence : c'est la conservation du tourbillon le long des lignes de flot du champ de vecteurs solution. Ce premier chapitre se conclut sur une formulation faible des équations d'Euler qui est spécifique à la dimension deux.

Le deuxième chapitre a pour but de présenter les bases de la théorie de Littlewood-Paley. Dans un premier temps, quelques inégalités simples sur les fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact sont démontrées. Ensuite, nous construisons une partition de l'unité associée à un recouvrement de l'espace $\mathbf{R}^d$ par des couronnes dyadiques.

Puis, nous utilisons cette partition de l'unité pour caractériser les espaces de Sobolev et de Hölder. Une certaine place est accordée à l'étude des cas limites d'espaces de Hölder, essentiellement la classe de Zygmund $C^1_\star$. Les chapitres 5 et 9 en illustreront la nécessité.

Ensuite, nous présentons une version très rudimentaire du calcul paradifférentiel. Les résultats que nous démontrons ici seront abondamment utilisés dans toute la suite du livre.

Enfin, comme premier exemple d'application de ces techniques, nous démontrons quelques propriétés de la pression et de son champ de gradient.

Comme son nom l'indique, le troisième chapitre est dévolu à l'étude de la loi de Biot-Savart. Il s'agit de savoir en quoi une information sur le tourbillon peut se traduire sur le champ de vecteurs de divergence nulle associé.

Après la présentation de quelques cas très simples, nous étudions l'action des opérateurs du type $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ sur les espaces L^p, c'est-à-dire que nous exposons le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz en contrôlant précisément les constantes en fonction de p. Les chapitres 5 et 9 montreront que ceci n'est pas une coquetterie.

Ensuite, le problème de l'action des opérateurs $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ sur l'espace des fonctions bornées est abordé dans le cadre de la dimension deux. Nous étudions tout d'abord en détail deux exemples. Le premier montre qu'un champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est une fonction bornée à support compact peut ne pas être lipschitzien. Le second exemple suggère que ce problème n'est pas sans relation avec la régularité tangentielle par rapport à une courbe suffisamment régulière.

Ce troisième chapitre se termine par la démonstration d'une inégalité relative à l'action des opérateurs $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ sur l'ensemble des fonctions bornées. Cette inégalité sera à la base des démonstrations des théorèmes de persistance de la régularité du bord d'une poche de tourbillon exposées aux chapitre 5 et 9.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution des équations d'Euler pour des données initiales régulières, c'est-à-dire dans une classe de Hölder C^r avec r strictement supérieur à 1. Dans un premier temps, nous résolvons un problème modèle. Nous démontrons également une condition nécessaire pour que le temps d'existence maximal de la solution soit fini. Au passage, nous établissons une estimation de propagation de la régularité hölderienne pour les champs de vecteurs de divergence nulle, lipschitziens.

Nous revenons ensuite aux équations d'Euler en vérifiant qu'elles sont bien un cas particulier du modèle précédent. Nous concluons alors le chapitre en démontrant une condition de non existence globale dans les cas suivants : le cas d'une donnée initiale périodique, le cas où le gradient de la vitesse appartient à L^p et, enfin, celui où le champ de vecteurs est une perturbation d'énergie finie d'une solution stationnaire.

Le cinquième chapitre a pour objet l'étude des solutions à tourbillon borné en dimension deux d'espace. En premier lieu, nous démontrons le théorème de Yudovich d'existence globale pour des données à tourbillon borné. Bien qu'a priori non lischiptzien, le champ de vecteurs solution est quasi-lipschitzien. On démontre alors un raffinement du théorème de Cauchy-Lipschitz. Un tel champ de vecteurs possède un flot. La régularité en espace de ce flot est exponentiellement décroissante en temps. On exhibe ensuite un exemple montrant que le théorème de Yudovich est optimal.

Ensuite, nous présentons le problème dit des poches de tourbillon. Puis, nous le résolvons en démontrant un théorème de persistance de la régularité tangentielle par rapport à une famille de champs de vecteurs peu réguliers. La démonstration de ce théorème utilise le calcul paradifférentiel introduit dans le chapitre 2. Ce résultat doit être compris comme un théorème de propagation de la régularité, jusqu'à un temps quelconque, dans un système d'équations quasi-linéaires.

Le sixième chapitre est consacré au problème dit des nappes de tourbillon. Après avoir présenté le problème, nous énonçons le théorème de J.-M. Delort d'existence d'une solution lorsque le tourbillon du champ de vecteurs de divergence nulle initial est une mesure bornée de partie singulière positive.

Ce problème se réduit à un problème de passage à la limite dans une intégrale grâce à la formulation faible spécifique à la dimension deux établie à la fin du chapitre 1. La démonstration se conclut au prix de quelques lemmes de théorie de l'intégration.

Le septième chapitre est une digression sur le front d'onde. Après une présentation élémentaire de ce concept de base de l'analyse microlocale, sont exposées les relations étroites entre front d'onde, théorie de Littlewood-Paley et produit des distributions. Ensuite, les concepts de front d'onde analytique et de front d'onde Gevrey sont introduits. On démontre un résultat de type "ellipticité microlocale" dans le cadre du front d'onde analytique ou du front d'onde Gevrey pour des champ de vecteurs très peu réguliers. Ceci sera utilisé au chapitre suivant.

Le huitième chapitre expose un résultat de régularité analytique ou Gevrey en temps sur le flot d'une solution pas trop singulière du système d'Euler. L'idée essentielle consiste à étudier l'action répétée, sur le gradient de la pression, de la dérivation le long de lignes de flot. On déduit de cette étude une majoration du front d'onde analytique (ou Gevrey) de la solution.

Le neuvième et dernier chapitre revient sur l'étude du problème des poches de tourbillon. On s'intéresse ici au cas où le bord de la poche présente des singularités, par exemple des coins ou des cusps. Les résultats, nouveaux, qui y sont démontrés, généralisent ceux du chapitre 5 sur les poches de tourbillon à bord régulier. On démontre que la régularité de la courbe persiste en dehors des points singuliers produits par ceux existant à l'instant initial. Ce type de résultat montre que le système d'Euler relatif à un fluide parfait incompressible, bien que non local, se comporte vis-à-vis de la propagation des singularités, comme un système local.

Ce texte trouve sa source dans trois cours faits à l'Institut Nankaï de Tian-Jin en 1991, à l'Ecole Polytechnique en 1992, et à l'Ecole Normale supérieure de Cachan en 1992–1993. Je tiens à remercier ici ces trois institutions. A ces diverses occasions, G. Allain, N. Burq, B. Bidegaray, C. Cancelier, T. Colin, P. Gamblin, C. Guillopé, J. Hong, G. Lebeau, L. Nedelec, X. Saint-Raymond, L. Robbiano et C.J. Xu ont manifesté pour le sujet un intérêt qui fût pour moi un puissant encouragement à la rédaction de ce texte. Je leur exprime toute ma gratitude. Je remercie particulièrement B. Bidegaray, R. Danchin, T. Desjardins et P. Gamblin qui ont relu divers morceaux et versions antérieures de ce texte et en ont extirpé force fautes.

Je remercie P. Gérard et D. Serre avec qui j'ai eu des discussions aussi amicales que fructueuses à propos des résultats exposés ici.

Enfin, il est évident que nombre de résultats et techniques exposés dans ce texte trouvent leur source dans les idées introduites en analyse non linéaire par J.-M. Bony à la fin des années soixante-dix. J'ai eu avec lui de nombreuses, et ô combien fécondes, discussions à ce propos. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Je voudrais conclure cette introduction en remerciant très chaleureusement le rapporteur ; il m'a fait de nombreuses remarques et suggestions qui ont beaucoup amélioré le texte initial.

Chapitre 1

Présentation des équations

1.1 Qu'est-ce-qu'un fluide parfait?

On cherche à décrire l'évolution d'un fluide parfait incompressible entre deux temps t_0 et t_1. Une particule de fluide située au point x à l'instant t_0 sera située au point $\psi_1(x)$ à l'instant t_1. L'incompressibilité du fluide se traduit par le fait que l'application ψ_1, supposée être un difféomorphisme, conserve la mesure, c'est-à-dire que son jacobien est de déterminant 1.

Dans toute la suite, nous supposerons que le fluide est indéfiniment étendu dans tout l'espace à d dimensions, d valant 2 ou 3. Ce choix provient d'une volonté de simplification. En effet, on peut aussi formuler la mécanique des fluides sur un domaine régulier (il faut alors introduire des conditions aux limites) ou encore sur une variété compacte (la formulation est alors un peu plus délicate). Ici, nous devrons simplement, en quelques endroits, prendre garde aux problèmes à l'infini.

Nous allons maintenant préciser les espaces fonctionnels avec lesquels nous allons modéliser un fluide parfait incompressible. Dans toute cette section, on se donne un difféomorphisme ψ_1 qui conserve le volume.

Définition 1.1.1 *Nous désignerons par $\mathcal{L}$ l'espace des fonctions continûment différentiables de $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^d$ telles que $\psi(t_0) = \mathrm{Id}$ et $\psi(t_1) = \psi_1$, telles qu'à chaque instant t, la fonction $\psi(t)$ soit un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d$ et enfin telles que $\partial_t\psi(t)$ soit continue de $[t_0, t_1]$ dans L^2.*

Nous désignerons par $\mathcal{L}_0$ l'espace des fonctions de $\mathcal{L}$ telles qu'à tout instant t, le difféomorphisme $\psi(t)$ préserve la mesure.

Une évolution, a priori possible, d'un fluide incompressible entre l'état à l'instant t_0 et l'état décrit à l'instant t_1 par le difféomorphisme ψ_1, est modélisée par une fonction ψ de l'espace $\mathcal{L}_0$.

Pour introduire un problème variationnel, il convient de définir une fonctionnelle dont les extrémales seront la clef du problème. Nous allons ici introduire l'action.

Définition 1.1.2 *On appellera action l'application $\mathcal{A}$ définie de $\mathcal{L}$ dans $\mathbf{R}_+$ par*

$$\mathcal{A}(\psi) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} |\partial_t\psi(t,x)|^2 dxdt.$$