

Astérisque

RÉGIS DE LA BRETÈCHE

Sur le nombre de points de hauteur bornée d'une certaine surface cubique singulière

Astérisque, tome 251 (1998), p. 51-77

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__51_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__51_0)

© Société mathématique de France, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE NOMBRE DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE D'UNE CERTAINE SURFACE CUBIQUE SINGULIÈRE

par

Régis de la Bretèche

Résumé. — En développant des méthodes d'intégration complexe, nous établissons une formule asymptotique très précise sur le nombre de points de hauteur inférieure à X d'une certaine variété torique. Nous estimons le cardinal

$$V(X) := \text{card}\{(x, y, z, t) \in (\mathbb{N} \cap [1, X])^4 : (x, y, z, t) = 1, xyz = t^3\}.$$

Soit $N(X) := (\log X)^{3/5} (\log_2 X)^{-1/5}$. Alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 et une constante $c > 0$ tels que l'on ait, pour X tendant vers l'infini, l'estimation

$$V(X) = XQ(\log X) + O(X^{1-1/8} \exp\{-cN(X)\})$$

De plus, le coefficient dominant de Q est égal à

$$\frac{1}{4 \times 6!} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^7 \left(1 + \frac{7}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \right\}.$$

1. Introduction

1.1. Énoncé des résultats. — Soit l'ensemble

$$E_\infty := \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 : (x, y, z) = 1, \exists t \in \mathbb{N} \quad xyz = t^3\}.$$

L'objet de ce travail est d'évaluer asymptotiquement $V(X)$ le cardinal de l'ensemble des éléments de E_∞ de coordonnées toutes inférieures à X lorsque X tend vers l'infini. Nous avons le résultat suivant

Théorème 1.1. — *Il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 et une constante $c > 0$ tels que l'on ait, pour X tendant vers l'infini, l'estimation*

$$(1) \quad V(X) = XQ(\log X) + O(X^{7/8} \exp\{-cN(X)\})$$

Classification mathématique par sujets (1991). — Primaire 14M25; secondaire 11M41.

Mots clefs. — Variété torique, Conjecture de Manin, Fonction zêta des hauteurs, Fonction de compte.

où l'on a noté $N(X) := (\log X)^{3/5} (\log_2 X)^{-1/5}$. De plus, le coefficient dominant de Q est égal à

$$(2) \quad C = \frac{1}{4 \times 6!} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^7 \left(1 + \frac{7}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \right\}.$$

On en déduit un prolongement de la fonction zêta des hauteurs associée. Soit $c(m) := \text{card}\{(x, y, z) \in E_\infty : \max\{x, y, z\} = m\}$ et

$$Z(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

Théorème 1.2. — *La fonction $s \rightarrow (s-1)^7 Z(s)$ admet un prolongement holomorphe au demi plan $\Re s > \frac{7}{8}$ et prend la valeur $6!C$ en 1.*

Commençons par exposer les motivations de ce problème. Nous montrerons au paragraphe 1.3. que le cardinal considéré est directement lié au dénombrement des points d'une variété torique non lisse de hauteur inférieure à X .

1.2. Origine du problème en géométrie algébrique. — Les variétés toriques sont un sujet d'étude privilégié en géométrie algébrique qui fournit de nombreux exemples pour tester des théories plus générales et plus abstraites. C'est aussi le cas pour l'évaluation asymptotique du nombre de points de hauteur bornée par X . Cette question de dénombrement, qui est clairement naturelle, permet, comme nous le verrons, de faire apparaître des invariants géométriques très intéressants.

Soit k un corps de nombres et une variété V de Fano sur k à laquelle on associe une fonction $\mathbf{h}$ des hauteurs anticanoniquement. Manin a conjecturé que, pour U un ouvert de V convenablement choisi, on a

$$(3) \quad N_U(X) := |\{P \in U : \mathbf{h}(P) \leq X\}| \sim CX(\log X)^{r-1}$$

où r est le rang du groupe de Picard de V et C est une constante non nulle. La restriction à un ouvert U permet d'éviter les sous-variétés accumulatrices. Par exemple, dans le cas de variétés cubiques, on exclut les points des droites contenues dans V . Dans [BT96-1], Batyrev et Tschinkel ont montré qu'en fait cette conjecture n'est pas pertinente pour certaines variétés de Fano. Cependant, elle a été vérifiée pour plusieurs classes d'exemples.

Dans [P93], Peyre raffine cette conjecture en donnant une expression de C en fonction de la mesure de Tamagawa. Il vérifie sur certains exemples la valeur de C conjecturée. Dans [BT96-2], [BT98-1] & [BT98-2], Batyrev et Tschinkel établissent cette formule pour toutes les variétés toriques sur un corps quelconque. Ils utilisent une série de Dirichlet associée à ce comptage exprimée dans un langage adélique. Dans le cas de $k = \mathbb{Q}$, Salberger [S98] retrouve ce résultat pour toute variété torique définie par un éventail régulier et complet. De plus, il donne un terme d'erreur. Il

utilise une méthode différente de celle de Batyrev et Tschinkel initiée par Schanuel [S79] et Peyre [P93]. Fouvry [F98] obtient aussi (3) dans le même cas particulier que l'auteur. Pour ce faire, par une étude arithmétique fine, il réussit à se ramener au dénombrement des triplets $(x, y, z) \in E_\infty$ mais satisfaisant aux conditions supplémentaires de coprimauté $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$. Cela lui permet alors d'avoir une représentation paramétrique des solutions en $(x, y, z) = (u^3, v^3, w^3)$ avec $(u, v) = (u, w) = (v, w) = 1$ ce qui facilite grandement le dénombrement.

Nous nous proposons ici d'examiner le cas d'une variété torique particulière et de montrer sur cet exemple que l'on obtient une estimation bien plus précise que tous les résultats connus précédemment.

1.3. Énoncé du problème en terme de variété torique. — Une variété torique peut être construite, par une méthode de type combinatoire, à partir de la donnée d'un réseau N et un éventail Δ .

Définition 1.3. — Un éventail est un ensemble fini de cônes strictement convexes polyédraux rationnels dans $N_\mathbb{R} = N \otimes \mathbb{R}$ satisfaisant à :

- (i) Chaque cône de Δ contient l'origine,
- (ii) Chaque face d'un cône de Δ est aussi un cône de Δ ,
- (iii) L'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun des deux cônes.

De plus,

- (iv) Δ est dit complet si $N_\mathbb{R}$ est la réunion des cônes de Δ ,
- (v) Δ est dit régulier si chaque cône de Δ est engendré par une partie d'une $\mathbb{Z}$ -base de N .

Lorsque Δ n'est pas régulier, il est possible de construire un *raffinement* Δ' de Δ (i.e. chaque cône de Δ est une réunion de cônes de Δ') tel que Δ' soit régulier et tel que l'application induite entre Δ' et Δ soit propre et birationnelle (voir le livre de Oda [O88], paragraphe 1.5). L'objectif d'une telle manipulation est de pouvoir se ramener à une variété torique $V_{\Delta'}$ non singulière.

On appelle rayon les cônes de dimension 1 et on note $\Delta(1)$ leur cardinal. Lorsque l'éventail est régulier et complet, cette construction permet aisément de calculer le rang du groupe de Picard $\text{Pic}(V_\Delta)$:

$$(4) \quad \text{rang}(\text{Pic}(V_\Delta)) = \text{card } \Delta(1) - \dim \Delta.$$

L'intérêt des variétés toriques est que leurs propriétés géométriques se traduisent en termes de donnée combinatoire qu'est l'éventail.

Expliquons brièvement la construction d'une variété torique à partir de son éventail Δ . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Fulton [Fu93]. Soit $\sigma \in \Delta$. Le cône dual détermine un semi-groupe S_σ . Celui-ci est engendré de manière finie, donc on peut lui associer une $\mathbb{Q}$ -algèbre de groupe $\mathbb{Q}[S_\sigma]$. À une telle algèbre correspond une variété affine $U_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{Q}[S_\sigma])$. Si τ est une face de σ , alors S_σ est contenue dans S_τ et donc $\mathbb{Q}[S_\sigma]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{Q}[S_\tau]$ ce

qui fournit une application $U_\sigma \mapsto U_\tau$. Avec cette identification, ces variétés affines recollées forment une variété algébrique V_Δ .

Construisons maintenant *notre* variété. Soient le réseau $N = \mathbb{Z}^2$ et trois points de ce réseau $n_1 := (-1, 2)$, $n_2 := (-1, -1)$, $n_3 := (2, -1)$. On définit Δ l'éventail composé de trois rayons τ_i engendrés par les n_i et des trois cônes σ_i de dimension deux engendrés par n_{i+1}, n_{i+2} . Notons tout de suite que Δ n'est pas régulier donc la variété considérée n'est pas lisse.

Soit (e_1, e_2) la base du réseau N et (e_1^*, e_2^*) la base duale dans $\text{Hom}(N, \mathbb{Z})$. Le semi-groupe S_{σ_1} est engendré par $e_1^* + 2e_2^*$, $2e_1^* + e_2^*$, $e_1^* + e_2^*$. On lui associe $\mathbb{Q}[S_{\sigma_1}]$ l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[XY^2, X^2Y, XY]$. On obtient ainsi

$$U_{\sigma_1} = \{(y, z, t) \in \mathbb{Q}^3 \text{ tel que } yz = t^3\}.$$

On fait la même chose pour les autres cônes de Δ . Les trois variétés affines U_{σ_i} obtenues correspondent en fait aux points de V_Δ tels que respectivement $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Dans la géométrie algébrique moderne, une variété algébrique est vue comme un cas particulier de schéma. Ici on définit la variété V_Δ de $\mathbb{P}_\mathbb{Q}^3$ comme l'ensemble des zéros dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ du polynôme homogène de degré trois $XYZ - T^3$. Le plongement dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ définit la hauteur $h : h(P) = \max\{|x|, |y|, |z|, |t|\}$ lorsque le point P de $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ est représenté par (x, y, z, t) et $\text{pgcd}(x, y, z, t) = 1$.

Soit U le sous-ensemble de V_Δ composé des quadruplets (x, y, z, t) tels que $xyz \neq 0$. On note que U est bien un ouvert pour la topologie de Zariski. De plus, U évite les sous-variétés accumulatrices de V_Δ . On peut donc affirmer la formule

$$(5) \quad V(X) = \frac{1}{4} N_U(X).$$

Cette transformation du problème en un dénombrement de points entiers positifs est faite d'une manière générale dans [S98].

Pour utiliser la formule (4), il faut que l'éventail soit régulier. Nous contruisons un raffinement de Δ qui le sera. On pose $n_4 := (1, 0)$, $n_5 := (0, 1)$, $n_6 := (-1, 1)$, $n_7 := (-1, 0)$, $n_8 := (0, -1)$ et $n_9 := (1, -1)$. L'éventail Δ' défini à partir des points n_i avec $i \in \{1, \dots, 9\}$ est un raffinement de Δ qui est lui régulier et complet. On a alors

$$\text{rang}(\text{Pic}(V_{\Delta'})) = \text{card } \Delta'(1) - \dim \Delta' = 9 - 2 = 7.$$

L'application induite de $V_{\Delta'}$ dans V_Δ , qui est un isomorphisme sur l'ouvert U , permet de se ramener à un compte sur une variété lisse. La hauteur donnée par le maximum des valeurs absolues des coordonnées correspond à une hauteur sur $V_{\Delta'}$ associée à un faisceau anticanonique. Le degré 6 du polynôme Q de la formule (1) est donc attendu. On remarque aussi que $4C$ est la constante conjecturée par Peyre [P93], obtenue par Batyrev et Tschinkel [BT98-2] et par Salberger [S98].

1.4. Présentation arithmétique du problème. — Notons Φ la fonction qui a un entier générique n associe $\Phi(n)$ le plus petit entier tel que $n\Phi(n)$ soit un cube. Cette