Bull. Soc. Math. France
147 (1), 2019, p. 91-121

UN CRITÈRE DE RÉCURRENCE POUR CERTAINS ESPACES HOMOGÈNES

PAR CAROLINE BRUÈRE

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, H un sous-groupe algébrique de G, μ une mesure de probabilité sur G à moment exponentiel fini dont le support engendre un sous-semi-groupe Zariski-dense de G. Soit $X = G/H$ le quotient de G par H. On étudie la chaîne de Markov sur X de probabilité de transition $P_x = \mu * \delta_x$ pour $x \in X$. On montre que soit pour tout $x \in X$, presque toute trajectoire partant de x est transiente, soit pour tout $x \in X$, presque toute trajectoire partant de x est récurrente. Cette récurrence est en fait uniforme, c'est-à-dire que pour tout point $x \in X$, presque toute trajectoire partant de x revient infiniment souvent dans un compact $C \subset X$ ne dépendant pas de x. De plus, on donne un critère de récurrence en fonction de G, H, et μ.

ABSTRACT (*Recurrence criterion for homogeneous spaces*). — Let G be a real connected algebraic semi-simple Lie group, and H an algebraic subgroup of G. Let μ be a probability measure on G, with finite exponential moment, whose support spans a Zariski-dense subsemigroup of G. Let $X = G/H$ be the quotient of G by H. We study the Markov chain on X with transition probability $P_x = \mu * \delta_x$ for $x \in X$. We prove that either for every $x \in X$, almost every trajectory starting from x is transient or for every $x \in X$, almost every trajectory starting from x is recurrent. In fact, this recurrence is uniform over all X, i.e. there exists a compact set $C \subset X$ such that for each point $x \in X$, every trajectory starting in x almost surely returns to C infinitely often. Furthermore, we give a criterion for recurrence depending on G, H, and μ.

Texte reçu le 24 mai 2016, modifié le 19 juin 2017, accepté le 28 août 2017.

CAROLINE BRUÈRE, Lycée Colbert, 7 impasse Colbert, 57100 Thionville • *E-mail :* `caroline.arvis@ac-nancy-metz.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 37B20, 37A30, 22E46, 22D40.

Mots clefs. — récurrence, groupe de Lie semi-simple réel, transience, chaine de Markov espace homogène.

© Société Mathématique de France
doi:10.24033/bsmf2776

1. Remerciements

Merci à Yves Benoist pour son aide précieuse dans l'élaboration de cet article, à Philippe Bougerol pour sa suggestion avisée sur la partie 5, et au rapporteur pour ses conseils détaillés et constructifs.

2. Introduction

Un célèbre théorème de Pólya (1928) dit qu'étant donnés $d \geq 1$ un entier et μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, à moment exponentiel fini, centrée, la marche aléatoire correspondante sur $\mathbb{R}^d$ est récurrente, si et seulement si d vaut 1 ou 2. Nous allons démontrer un résultat analogue dans le cas d'une marche aléatoire sur certains espaces homogènes associés à des groupes de Lie semi-simples.

Soit G un groupe topologique localement compact à base dénombrable, H un sous-groupe fermé de G, et $X = G/H$ le quotient de G par H. Soit μ une mesure de probabilité sur G. La *marche aléatoire sur X associée à G et μ* est la chaîne de Markov sur l'espace X de probabilité de transition $P_x = \mu * \delta_x$ pour $x \in X$. Notons $B = G^{\mathbb{N}^*}$, et $\beta = \mu^{\mathbb{N}^*}$ la mesure de probabilité produit sur B.

Définition 2.1. — On dit que la marche aléatoire sur X est *récurrente* en un point $x \in X$ s'il existe un compact C de X tel que

$$\beta\left(\{b \in B \,|\, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : b_n \cdots b_1 x \in C\}\right) = 1.$$

On dit que la marche est *transiente* en un point $x \in X$ si pour tout compact C de X, on a

$$\beta\left(\{b \in B \,|\, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : b_n \cdots b_1 x \notin C\}\right) = 1.$$

On dit que la marche aléatoire est récurrente (respectivement transiente) sur tout X si elle l'est en tout point. On dit que la marche aléatoire sur X est *uniformément récurrente sur tout* X s'il existe un compact C de X tel que pour tout $x \in X$

$$\beta\left(\{b \in B \,|\, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : b_n \cdots b_1 x \in C\}\right) = 1.$$

Remarquons qu'avec ces définitions, un point $x \in X$ peut être récurrent sans que presque toute trajectoire revienne dans tout voisinage de x. Par exemple, dans le cas de l'action sur l'espace projectif de dimension $m-1$ d'un sous-groupe de Schottky Zariski-dense de $\mathrm{SL}(m)$, engendré par deux matrices, l'espace ω-limite de presque toutes les trajectoires est un compact de Cantor ; tous les points de l'espace projectif sont récurrents selon notre définition.

Dans le cas où μ est étalée, c'est-à-dire absolument continue par rapport à la mesure de Haar, il existe des théorèmes de dichotomie, i.e. des conditions pour que les états soient tous récurrents ou tous transients, notamment le théorème de Hennion et Roynette [18], affiné par Elie dans [10], et dont une preuve plus courte est fournie par Revuz dans [20]. Ce théorème concerne une classe très large d'espaces homogènes. Cependant, la condition "μ étalée" est très restrictive. Elle ne permet par exemple pas de traiter le cas décrit ci-dessus d'une mesure à support fini engendrant un semi-groupe discret Zariski-dense dans G. Nous allons donner un critère de récurrence n'utilisant pas cette condition, sur une classe plus restreinte d'espaces homogènes.

Considérons pour G un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, et pour H un sous-groupe algébrique de G. Munissons G d'une mesure de probabilité μ, dont le support engendre un semi-groupe Γ_μ Zariski-dense dans G. Mentionnons tout d'abord les travaux sur la récurrence sur les espaces homogènes de Guivarc'h et Raja [15] et [16], de Benoist et Quint [5, 4], et [3]. Plusieurs problèmes apparaissent. Les trajectoires issues de chaque point ont-elles presque toutes le même comportement, i.e. la marche est-elle soit récurrente, soit transiente en chaque point ? Si c'est le cas, a-t-on un théorème de dichotomie, i.e. la marche est-elle soit récurrente sur tout X, soit transiente sur tout X ? Enfin, quels critères permettent, selon G, H, et μ, de dire si la marche aléatoire est transiente ou récurrente sur tout X ?

Nous allons répondre par l'affirmative aux deux premières questions, dans le cadre défini plus haut, pour des mesures à moment exponentiel fini. Nous donnerons également une condition nécessaire et suffisante de récurrence. Commençons par une définition :

Définition 2.2. — Soit G un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, dont on note κ la projection de Cartan (voir la définition 6.8). Soit μ une mesure de probabilité sur G. On dit qu'elle est *à moment exponentiel fini* s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le moment d'ordre exponentiel α soit fini :

$$\int_G e^{\alpha||\kappa(g)||}\,\mathrm{d}\mu(g) < \infty.$$

On dit qu'elle est *Zariski-dense* si son support engendre un sous-semi-groupe Γ_μ de G qui est Zariski-dense dans G.

Énonçons alors le théorème de dichotomie et le critère de récurrence.

Théorème 2.3. — ***(Théorème de dichotomie pour des marches aléatoires sur certains espaces homogènes)*** *Soit G un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, et H un sous-groupe algébrique de G. Notons X l'espace homogène $X = G/H$. Soit μ une mesure de probabilité sur G à moment exponentiel fini, et Zariski-dense. Alors la marche aléatoire sur X associée à G et μ est soit uniformément récurrente sur tout X, soit transiente sur tout X.*

Ce théorème est en fait un corollaire du théorème 2.4 suivant, qui décrit les cas où la marche aléatoire sur X associée à G et μ est récurrente, et ceux où elle est transiente sur tout X. Soit N un sous-groupe unipotent maximal de G, P le normalisateur de N, A un sous-tore déployé maximal de P, et $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de A. Notons $\mathcal{P} = G/P$ la variété drapeau de G, $\sigma : G \times \mathcal{P} \to \mathfrak{a}$ le cocycle d'Iwasawa (cf. 3.4), et σ_μ sa moyenne, aussi appelée le vecteur de Lyapounov de μ.

Théorème 2.4. — ***(Critère de récurrence pour certains espaces homogènes)*** *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, la marche aléatoire sur X associée à G et μ est uniformément récurrente sur tout X si et seulement si H contient un conjugué de $A'N$, où A' est un sous-groupe de A de codimension au plus 2, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}'$ contient la moyenne σ_μ du cocycle d'Iwasawa. Sinon, la marche est transiente sur tout X.*

La preuve des théorèmes sera donnée en 7. Remarquons d'abord qu'à conjugaison près, les sous-groupes algébriques H de G contiennent un sous-groupe cocompact de la forme $A'N'$, avec A' et N' des sous-groupes algébriques de A et N respectivement. Nous commencerons par montrer – c'est l'objet de la proposition 4.1 – que, si N' est différent de N, la marche aléatoire est nécessairement transiente sur tout X. Cela permettra de se ramener à des groupes de la forme $A'N$, et à la récurrence ou transience d'un cocycle, le cocycle d'Iwasawa, sur un espace vectoriel réel. La démonstration utilisera des propriétés des opérateurs de transferts développées dans [7], et des arguments classiques de la démonstration du théorème de récurrence de Pólya (voir par exemple [23]). Un théorème de Conze et Schmidt [9, 22], qui donne la récurrence de certains cocycles si leur distribution asymptotique est normale, permettra ensuite de montrer une condition suffisante de récurrence, grâce au théorème central-limite pour le cocycle d'Iwasawa [12]. On montrera enfin que la récurrence est uniforme en montrant l'ergodicité d'un système dynamique fibré, grâce à des travaux de Guivarc'h sur l'exactitude [14].

3. Définitions et préliminaires

3.1. La décomposition d'Iwasawa. — Prenons à nouveau G un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel. Notons A un tore déployé maximal de G, N un sous-groupe unipotent maximal de G, dont le normalisateur P contient A, et A_e la composante connexe de A contenant l'identité. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée au groupe G, $\mathfrak{a}$ celle associée au tore A, et Σ l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{g}$, sous l'action adjointe de $\mathfrak{a}$. Notons Σ_+ l'ensemble de racines positives associé au choix de A et N, $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$ la chambre de Weyl associée à Σ_+. Notons également $A_+ = \exp \mathfrak{a}_+ \subset A$.

Définition/Proposition 3.1. — Il existe une écriture de G sous la forme

$$G = KA_eN$$

où K est un sous-groupe compact de G, appelée la *décomposition d'Iwasawa* de G. G s'écrit alors également

$$G = KA_+K,$$

sa *décomposition de Cartan.*

On pourra voir [7, ch. 6] pour une preuve de l'existence de ces décompositions. La proposition suivante donne une décomposition analogue à la décomposition d'Iwasawa pour tout sous-groupe algébrique H de G.

PROPOSITION 3.2. — *Soit H un sous-groupe algébrique de G. Il existe un soustore A' de A et un sous-groupe algébrique N' de N tels que, à conjugaison près, $A'N'$ soit un sous-groupe cocompact de H.*

Preuve. — H est un sous-groupe de Lie algébrique de G ; il a donc une décomposition de la forme

$$H = K'A''N'',$$

avec K' un sous-groupe compact de H, A'' un tore déployé, et N'' un sous-groupe unipotent maximal normalisé par A''. Puisque tous les sous-groupes trigonalisables maximaux d'un groupe réductif sont conjugués [8, Thm 8.2], $A''N''$ est conjugué à un sous-groupe de AN. Supposons, pour simplifier, $A''N'' \subset AN$. On a alors $N'' \subset N$. D'après [8, Thm 11.6], tous les tores déployés maximaux de AN sont conjugués dans AN. A'' est donc conjugué à un sous-tore A' de A dans AN ; comme N est normalisé par AN, les conjugués de N'' par des éléments de AN sont des sous-groupes de N. Il existe donc $N' \subset N$ tel que $A''N''$ est conjugué à $A'N'$. □

Cette décomposition va permettre de définir un cocycle crucial pour l'étude des marches aléatoires sur l'espace homogène $X = G/H$.

3.2. Le cocycle d'Iwasawa. — Notons $\mathcal{P} = G/P$ la variété drapeau de G, et notons comme auparavant μ une mesure de probabilité sur G Zariski-dense, à moment exponentiel fini. Le fait suivant est dû à Furstenberg [11], Guivarc'h, Raugi [17], Goldsheid et Margulis [13].

PROPOSITION 3.3. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il existe sur $\mathcal{P}$ une unique mesure μ-stationnaire, qu'on notera dorénavant ν, appelée* mesure de Furstenberg*. Rappelons qu'une mesure ν est dite μ-stationnaire, μ-invariante, ou μ-harmonique si elle vérifie la condition*

$$\nu = \mu * \nu = \int_G g_* \nu \, \mathrm{d}\mu(g).$$