Astérisque

PIERRE COLMEZ

Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules

Astérisque, tome 330 (2010), p. 281-509

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__281_0>

Astérisque
330, 2010, p. 281–509

REPRÉSENTATIONS DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET (φ, Γ)-MODULES

par

Pierre Colmez

Résumé. — Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Nous construisons une correspondance (de Langlands locale p-adique) associant à toute L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, irréductible de dimension 2, une représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, unitaire, admissible, et irréductible. Nous identifions les vecteurs localement analytiques et localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$, ce qui nous permet de montrer que cette correspondance encode la correspondance de Langlands locale classique (pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Abstract. — Let L be a finite extension of $\mathbf{Q}_p$. We construct a (p-adic local Langlands) correspondence attaching to any irreducible, 2-dimensional, L-representation of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, a unitary, admissible, irreducible L-representation $\mathbf{\Pi}(V)$ of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. We identify the locally analytic and locally algebraic vectors of $\mathbf{\Pi}(V)$, which allows us to show that this correspondence encodes the classical local Langlands correspondence (for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Introduction

1. Notations. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{Q}_p$. On note $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le *caractère cyclotomique*; il induit un isomorphisme de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on note $\sigma_a \in \Gamma$ l'élément défini par $\chi(\sigma_a) = a$. On note $\mathscr{H}$ le noyau de χ et $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$ le groupe de Galois absolu de l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}_p$. Enfin, soit $\Gamma^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p)$. Alors $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}'$ est l'abélianisé $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, Γ et Γ^{nr} s'identifient naturellement à des sous-groupes de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$, et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} = \Gamma \times \Gamma^{\mathrm{nr}}$.

On fixe aussi une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ (on peut parfois se permettre de remplacer L par une extension finie; L est donc variablement fixe...), et on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers, $\mathfrak{m}_L$ son idéal maximal et $k_L = \mathscr{O}_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S**, 11F**.
Mots clefs. — Correspondance de Langlands locale, (φ, Γ)-module, analyse fonctionnelle, théorie d'Iwasawa.

Si M est un $\mathbf{Z}_p$-module, on note $\mathscr{O}_L \cdot M$ le $\mathscr{O}_L$-module $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} M$, et si M est un $\mathscr{O}_L$-module ou un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel, on note $L \cdot M$ le L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathscr{O}_L} M$ ou $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} M$.

On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des séries de Laurent $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$, à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ et vérifiant $\lim_{k \to -\infty} a_k = 0$. On note $k_{\mathscr{E}} = k_L((T))$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ son corps des fractions. Enfin, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_L[[T]]$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$ de $\mathscr{E}$, et $k_{\mathscr{E}}^+ = k_L[[T]]$ l'anneau des entiers de $k_{\mathscr{E}}$.

On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, $k_{\mathscr{E}}$, $k_{\mathscr{E}}^+$, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^+$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de Γ et du frobenius φ, respectant les structures d'anneaux, en envoyant T sur $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Ces actions commutent entre elles.

Si Λ est un anneau topologique, soit $\widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \Lambda^*$. L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ du groupe de Weil $W_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)} \delta(\chi(g)),$$

où $\deg(g)$ est l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$, si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Si $n \to \delta(p^n)$ se prolonge par continuité à $\widehat{\mathbf{Z}}$, alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. C'est en particulier le cas si $\Lambda = k_L$ ou si $\Lambda = L$ et si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$). En particulier, le caractère $x \mapsto x|x|$ correspond au caractère cyclotomique χ et sa réduction modulo p, notée ω, correspond au caractère de Teichmüller.

2. Cadre général. — Nous nous proposons d'établir une correspondance entre (toutes [(1)]) les L-représentations absolument irréductibles V de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (presque [(2)] toutes) les L-représentations absolument irréductibles unitaires admissibles Π de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettant un caractère central.

Cette correspondance repose sur :

– la construction d'un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ associant une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (pas forcément de dimension 2) à toute représentation unitaire de longueur finie de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (pas forcément irréductible),

– la construction d'une représentation $\mathbf{D}(V) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à partir de toute représentation V (pas forcément de dimension 2) de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et de tout caractère unitaire $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$.

La représentation $\mathbf{D}(V) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est, topologiquement, l'extension d'un L-banach par le dual d'un L-banach, mais il semble raisonnable de penser qu'il n'existe, en

(1) Cf. note 7 pour des restrictions temporaires.

(2) Les sous-quotients des représentations induites par un caractère unitaire du borel n'apparaissent pas : leur image par le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension 1 (ou 0 dans le cas d'un caractère) et pas de dimension 2. Le fait que toutes les autres fournissent des représentations de dimension 2 (au moins si $p \geq 5$) est un résultat récent de Paskunas [**60**].

général, pas de telle décomposition de $\mathbf{D}(V) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ qui soit $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariante. Par contre, si V est de dimension 2, et si $\delta = (x|x|)^{-1}\delta_V$, où δ_V est le caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ correspondant à la représentation $\det V$ par la théorie locale du corps de classes, alors $\mathbf{D}(V) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est une extension d'une représentation unitaire admissible $\mathbf{\Pi}(V)$ par son dual (tordu par $\delta \circ \det$). De plus, on a $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(V)) = V$, ce qui montre que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. La correspondance de Langlands locale p-adique $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ ainsi construite jouit de propriétés remarquables :

– elle est compatible à la réduction modulo p,

– elle se comporte bien en famille,

– elle encode la correspondance de Langlands locale classique.

Ce dernier résultat était le point de départ de Breuil [**15**] dans sa quête d'une correspondance de Langlands locale p-adique ; Emerton [**39**] et Kisin [**54**] savent en déduire (grâce aux travaux de Khare et Wintenberger [**51, 52**] démontrant la conjecture de Serre pour les représentations modulo p) la conjecture de Fontaine-Mazur pour la plupart des représentations de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$. Le premier point avait été vérifié par Berger [**7**] pour les représentations de la série principale (après semi-simplification).

Dans l'appendice [**55**], Kisin explique comment déduire l'existence de la correspondance à partir de la construction du seul foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ en utilisant les représentations de la série principale unitaire [**8, 30**] de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1(\Pi, \Pi) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi), \mathbf{V}(\Pi))$ (th. VII.5.2 du présent article). La construction explicite de la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ semble toutefois incontournable pour l'étude des propriétés fines de la correspondance.

3. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique. — Beaucoup des constructions de l'article sont inspirées par le dictionnaire entre anneaux de séries formelles et espaces fonctionnels p-adiques.

Fonctions analytiques sur des couronnes. — En sus des anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}$ définis plus haut, on dispose en particulier des anneaux suivants :

• l'anneau *de Robba* $\mathscr{R}$ des $f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n$ analytiques sur une couronne du type $0 < v_p(T) \leq r$, où r dépend de f et les a_n sont des éléments de L,

• le corps $\mathscr{E}^\dagger$, ensemble des éléments bornés de $\mathscr{R}$ (le corps $\mathscr{E}$ est alors le complété de $\mathscr{E}^\dagger$ pour la valuation $v_p(f) = \inf_{n\in\mathbf{Z}} v_p(a_n)$ et $\mathscr{E}^\dagger$ peut aussi être vu comme l'ensemble des éléments *surconvergents* de $\mathscr{E}$),

• $\mathscr{R}^+ = \mathscr{R}^\natural = \mathscr{R} \cap L[[T]]$, anneau des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T) > 0$,

• $\mathscr{E}^+ = \mathscr{E}^\natural = \mathscr{E} \cap L[[T]]$, sous-anneau de $\mathscr{R}^+$ des fonctions analytiques bornées sur le disque $v_p(T) > 0$.

Espaces fonctionnels et leurs duaux. — Voici un petit échantillon des espaces fonctionnels que l'on peut considérer.

• $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$, espace des $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ continues (c'est un L-banach),

• $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, espace des $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ localement analytiques (limite inductive compacte de L-banach),

• $\mathrm{LP}^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$, espace des $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ localement polynomiales de degré $\leq k-1$,

• $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) = \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)^*$, espace des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ (dual de banach),

• $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) = \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)^*$, espace des distributions sur $\mathbf{Z}_p$ (c'est un fréchet).
Le dictionnaire. — A une mesure ou une distribution μ, on associe sa transformée d'Amice A_μ, définie par

$$A_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu \Big) T^n,$$

et à un élément f de $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$, on associe la fonction $\phi_f : \mathbf{Z}_p \to L$, définie par

$$\phi_f(x) = \mathrm{rés}_0\big((1+T)^x f \frac{dT}{1+T}\big).$$

Les théorèmes de Mahler et d'Amice décrivant les fonctions continues ou localement analytiques en termes de leur développement de Mahler (cf. [**29**]) permettent de reformuler l'analyse sur $\mathbf{Z}_p$ de manière compacte.

Théorème 0.1. — (i) *L'application $\mu \mapsto A_\mu$ induit des isomorphismes $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) \cong \mathscr{E}^\natural$ et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \cong \mathscr{R}^\natural$.*

(ii) *L'inclusion $\mathscr{E}^\dagger \subset \mathscr{R}$ induit un isomorphisme $\mathscr{E}^\dagger/\mathscr{E}^\natural \cong \mathscr{R}/\mathscr{R}^\natural$ et l'application $f \mapsto \phi_f$ induit des isomorphismes $\mathscr{E}/\mathscr{E}^\natural \cong \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$ et $\mathscr{E}^\dagger/\mathscr{E}^\natural \cong \mathscr{R}/\mathscr{R}^\natural \cong \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$.*

(iii) *$f \mapsto \phi_f$ induit un isomorphisme $(t^{-k}\mathscr{R}^\natural \cap \mathscr{R})/\mathscr{R}^\natural \cong \mathrm{LP}^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$, où, comme d'habitude, $t = \log(1+T)$.*

(iv) *$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi_f \,\mu = \mathrm{rés}_0\big(A_\mu f \frac{dT}{1+T}\big)$, si $f \in \mathscr{E}$ et $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, ou si $f \in \mathscr{R}$ et si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$.*

Remarque 0.2. — On déduit du th. 0.1 les suites exactes suivantes d'espaces vectoriels topologiques :

$$0 \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)^* \to \mathscr{E} \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p) \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)^* \to \mathscr{R} \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to 0.$$

4. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ,Γ)-modules.— Nous aurons affaire aux catégories suivantes de représentations de $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$:

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules Π, *lisses* (l'action de G est localement constante), *admissibles*[(3)] (Π^K de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ pour tout sous-groupe ouvert compact K de G), de longueur finie, et admettant un caractère central,

• $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules Π séparés et complets pour la topologie p-adique, sans p-torsion, tels que $\Pi/p^n\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, pour tout n,

• $\mathrm{Rep}_L G$, catégorie des $L[G]$-modules munis d'un réseau appartenant à $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$.

De même, nous rencontrerons les catégories suivantes de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$:

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, catégorie des *$\mathscr{O}_L$-représentations de torsion* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. des $\mathscr{O}_L$-modules de longueur finie, munis d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$),

• $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, catégorie des *$\mathscr{O}_L$-représentations sans torsion* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. des $\mathscr{O}_L$-modules V libres et de rang fini, tels que $V/p^nV \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, pour tout n),

• $\mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, catégorie des *$L$-représentations* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. des L-espaces vectoriels de dimension finie admettant un réseau appartenant à $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$).

---

(3) D'après [**2, 13**], cette condition est conséquence des autres.