Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1181, p. 1 à 72
doi : 10.24033/ast.1182

GROUPES DE SURFACE DANS LES RÉSEAUX DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES
[*d'après* J. Kahn, V. Marković, U. Hamenstädt, F. Labourie et S. Mozes]

par **Fanny Kassel**

Un *réseau* d'un groupe de Lie G est un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ soit de volume fini pour la mesure de Haar ; on dit que Γ est cocompact si G/Γ est compact.

Tout réseau cocompact sans torsion Γ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est un groupe *de surface*, c'est-à-dire isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte S de genre au moins deux. En effet, on peut prendre pour S le quotient du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par Γ.

Le but de cet exposé est de présenter le résultat suivant.

Théorème principal (Kahn–Marković, Hamenstädt, Kahn–Labourie–Mozes). *Soit G un groupe de Lie simple complexe* [(1)]*, ou l'un des groupes* $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ *ou* $\mathrm{Sp}(p,q)$ *pour* $p > q \geqslant 1$. *Tout réseau cocompact de G contient un sous-groupe de surface.*

Le cas $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est dû à Kahn et Marković (2012), les cas $G = \mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,1)$ et $\mathrm{Sp}(p,1)$ à Hamenstädt (2015), et le cas général à Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). Récemment, Hamenstädt (2021) a annoncé une nouvelle démonstration du cas général, qui étend les méthodes de son article de 2015.

Dans la partie 1 nous présentons diverses motivations du théorème, puis dans la partie 2 nous en énonçons des versions plus précises, pour une classe plus générale de groupes de Lie semi-simples G. La stratégie de la preuve est expliquée dans la partie 3. Elle comporte trois étapes : géométrique (partie 4), dynamique (partie 5) et combinatoire (partie 6).

Remerciements. — Je remercie chaleureusement Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Jean-Philippe Burelle, León Carvajales, Balthazar Fléchelles, Olivier Glorieux, Jeremy Kahn, François Labourie, Daniel Monclair, Alan Reid, Ilia Smilga, Katie Vokes, ainsi que Nicolas Bourbaki, pour leur aide dans la préparation de cet exposé. Je suis particulièrement reconnaissante à Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Olivier Glorieux et François Labourie pour de nombreuses discussions autour des articles présentés ici.

(1) Par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$; *cf.* Helgason (2001, Ch. X, §2) pour une description explicite de tous les groupes de Lie simples classiques.

1. Motivations

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact, par exemple $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. Comprendre les sous-groupes des réseaux

Un point de vue fécond en théorie des groupes est de chercher à comprendre certains groupes en étudiant quels types de sous-groupes ils admettent. Il résulte des travaux de Tits (1972) que tout réseau de G contient un groupe libre non abélien à deux générateurs. On peut voir les groupes de surface comme les groupes de type fini (non résolubles à indice fini près) les plus « simples » après les groupes libres [(2)]. La question suivante est alors naturelle dans le cadre de l'étude des réseaux des groupes de Lie semi-simples.

Question 1.1. Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface ?

Le théorème principal répond affirmativement à cette question pour les réseaux cocompacts des groupes de Lie simples complexes et des groupes $\mathrm{SO}(2p-1, 1)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ pour $p > q \geqslant 1$.

Lorsque G est de rang réel un (c'est-à-dire localement isomorphe à $\mathrm{SO}(n, 1)$, $\mathrm{SU}(n, 1)$, $\mathrm{Sp}(n, 1)$ ou à la forme réelle de rang un du groupe exceptionnel F_4), les réseaux cocompacts de G sont des groupes hyperboliques au sens de Gromov. La question 1.1 pour ces réseaux est alors un cas particulier d'une question de Gromov (*cf.* Bestvina, 2000, Q. 1.6) : tout groupe hyperbolique à un bout admet-il un sous-groupe de surface ? Voir par exemple Gordon, Long et Reid (2004) pour une réponse affirmative dans le cadre des groupes de Coxeter, et Calegari (2008) pour des conditions homologiques suffisantes. Notons qu'un groupe hyperbolique ne peut contenir qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes de surface correspondant à des surfaces de genre donné, comme suggéré par Gromov (1987) et démontré par Delzant (1995) ; voir Thurston (1997) pour les groupes de 3-variétés hyperboliques.

En rang réel supérieur, il est facile de construire, de manière arithmétique, des exemples de réseaux contenant des groupes de surface.

Exemple 1.2. (*cf.* Benoist, 2009, § 2.1, exemples 5 et 8) Soit $n \geqslant 3$. L'automorphisme σ d'ordre deux de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ définit un plongement $\iota : g \mapsto (g, g^\sigma)$ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ dans $G := \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, et $\Gamma := \iota(\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$ est un réseau non cocompact

(2) Par exemple en considérant la dimension cohomologique : les groupes sans torsion de dimension cohomologique 1 sont les groupes libres (Stallings, 1968) ; les groupes de surface sont de dimension cohomologique 2.

de G. Il contient $\Lambda := \iota(H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$, où $H \simeq \mathrm{SO}(2,1)_0 \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est la composante neutre du groupe orthogonal associé à la forme quadratique $x^2 + y^2 - \sqrt{2}\, z^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Le groupe $\Gamma_0 := H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ est un réseau cocompact de H. Ainsi, $\Lambda = \iota(\Gamma_0)$ est un sous-groupe de surface de Γ.

Afin d'établir que *tout* réseau contient des groupes de surface, nous verrons que la démonstration du théorème principal repose, non pas sur des considérations arithmétiques, mais sur des arguments géométriques et dynamiques.

1.2. Sous-groupes de surface « bien positionnés dans G »

La manière peut-être la plus simple d'obtenir des sous-groupes discrets isomorphes à des groupes de surface dans des groupes de Lie semi-simples G est de considérer des réseaux cocompacts Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et de les voir comme des sous-groupes discrets de G via un plongement τ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ dans G. Autrement dit, on part d'une surface compacte S de genre au moins deux ; on la munit grâce au théorème d'uniformisation d'une structure hyperbolique, ce qui définit une représentation injective de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, d'image un réseau cocompact Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$; puis on applique le plongement τ ou l'un de ses conjugués. Nous appellerons ces sous-groupes *τ-fuchsiens*, par analogie avec la terminologie classique pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Définition 1.3. Soient G un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Un sous-groupe de G est *τ-fuchsien* s'il est l'image d'une *représentation τ-fuchsienne* d'un groupe de surface $\pi_1(S)$, c'est-à-dire d'une représentation de la forme

$$\rho_0 : \pi_1(S) \xhookrightarrow{\varrho} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \xhookrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\mathrm{conj}} G,$$

où ϱ est injective d'image discrète et conj est la conjugaison par un élément de G.

Il se peut qu'un réseau Γ de G contienne des sous-groupes de surface τ-fuchsiens pour un certain plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$: c'est le cas dans l'exemple 1.2 pour $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq H \xhookrightarrow{\iota} G$. En général, étant donné un réseau Γ, on pourrait espérer qu'à défaut de sous-groupes τ-fuchsiens, il contienne au moins des *déformations* de sous-groupes τ-fuchsiens. De telles petites déformations sont encore des groupes de surface par la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Soient G un groupe de Lie semi-simple, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ une représentation τ-fuchsienne d'un groupe de surface $\pi_1(S)$ (définition 1.3). Il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de ρ_0 dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ formé entièrement de représentations injectives d'image discrète.*

On note ici $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ l'espace des représentations de $\pi_1(S)$ dans G, muni de sa topologie naturelle (topologie de la convergence sur une partie génératrice finie de $\pi_1(S)$). La proposition 1.4 est initialement due à Guichard (2004) ; c'est désormais une conséquence facile de la théorie des représentations anosoviennes, *cf.* paragraphe 1.4.

Pour un ouvert $\mathscr{U}$ comme ci-dessus, l'image de toute représentation $\rho \in \mathscr{U}$ est un sous-groupe de surface discret de G ; par analogie avec le cas classique $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, on dira qu'il est τ*-quasi-fuchsien* dès que $\mathscr{U}$ est connexe.

Définition 1.5. Soient G un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Un sous-groupe de G est τ*-quasi-fuchsien* s'il est de la forme $\rho(\pi_1(S))$ pour un groupe de surface $\pi_1(S)$ et une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ appartenant à un ouvert connexe $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ comme dans la proposition 1.4.

1.2.1. *Ouverts de déformations de groupes τ-fuchsiens.* — Des ouverts $\mathscr{U}$ comme dans la proposition 1.4 ont été beaucoup étudiés dans plusieurs cas.

Exemple 1.6. Soient $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Toute représentation τ-fuchsienne $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ d'un groupe de surface $\pi_1(S)$ est contenue dans l'ouvert $\mathscr{U}$ des *représentations quasi-fuchsiennes* de $\pi_1(S)$, c'est-à-dire des représentations injectives de $\pi_1(S)$ dans G dont l'image est un sous-groupe discret dans lequel tous les éléments non triviaux sont hyperboliques (c'est-à-dire diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et dont les valeurs propres sont de modules différents de 1). Cet ouvert $\mathscr{U}$ joue un rôle important dans la théorie des groupes kleiniens. Il est connexe (Bers a montré que, modulo conjugaison par G au but, il est naturellement paramétré par le produit de deux copies de l'espace de Teichmüller de S) et dense dans l'ensemble des représentations injectives d'image discrète de $\pi_1(S)$ dans G.

Exemple 1.7. Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (voir l'exemple 2.1 ci-dessous). D'après Choi et Goldman (pour $n = 3$), Labourie (n quelconque), Fock et Goncharov (n quelconque), pour toute représentation τ-fuchsienne $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$, la composante connexe de ρ_0 dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ est entièrement formée de représentations injectives et discrètes. D'après Hitchin, cette composante connexe est, modulo conjugaison par G au but, homéomorphe à une boule de dimension $(n^2 - 1)(2\mathrm{g} - 2)$, où $\mathrm{g} \geqslant 2$ est le genre de la surface S. Désormais appelée *composante de Hitchin*, elle joue un rôle important en *théorie de Teichmüller–Thurston de rang supérieur* (*cf.* Pozzetti, 2019).

Il est remarquable qu'il existe ainsi des sous-groupes discrets de G (sous-groupes de surface τ-fuchsiens) avec de gros espaces de déformations continues. Par contraste, les réseaux de G ont souvent de fortes propriétés de rigidité, qui ont donné lieu à des travaux célèbres. Par exemple, pour G non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (resp. non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ni à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$) et sans facteur compact, les réseaux cocompacts (resp. non cocompacts) irréductibles de G sont localement rigides, d'après Selberg, Calabi, Weil, Garland et Raghunathan. Pour G sans facteur localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et sans facteur compact, la rigidité de Mostow implique que toute représentation injective et discrète d'un réseau irréductible de G à valeurs dans G est la restriction d'un automorphisme de G. Pour G de rang réel supérieur et sans facteur compact, Margulis a montré que les réseaux irréductibles de G ont de surcroît une propriété plus forte de super-rigidité, qui implique que ce sont des groupes arithmétiques. Voir Pansu (1995) pour plus de détails.

1.2.2. *Retour aux sous-groupes des réseaux.* — Voici une version plus précise de la question 1.1.

Question 1.8. Soient G un groupe de Lie réel semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface τ-quasi-fuchsiens (définition 1.5) ?

Dans une série de papiers, Long, Reid et Thistlethwaite (2011), Long et Reid (2013, 2016), Long et Thistlethwaite (2018, 2020) montrent que, pour $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ et τ le plongement irréductible, c'est le cas de certains réseaux de G, à savoir tous les réseaux non cocompacts pour $n = 3$, une famille infinie de réseaux cocompacts pour $n = 3$, et le réseau non cocompact $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{Z})$ pour $n = 4$ et $n \geqslant 5$ impair. Pour cela, ils considèrent des groupes discrets Δ d'isométries de $\mathbb{H}^2$ engendrés par les réflexions orthogonales dans les côtés de certains triangles de $\mathbb{H}^2$; ces groupes admettent des sous-groupes d'indice fini sans torsion, qui sont alors des groupes de surface. L'analogue pour Δ de la composante de Hitchin de l'exemple 1.7 (*cf.* Alessandrini, Lee et Schaffhauser, 2022) est une composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathrm{PGL}(n,\mathbb{R}))$ formée entièrement de représentations injectives et discrètes, dont les auteurs montrent que certaines prennent leurs valeurs dans des sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$. Ceci fournit, pour certains réseaux donnés de G, une infinité de classes de conjugaison de sous-groupes de surface correspondant à des surfaces de même genre, par contraste avec la situation de rang un mentionnée au paragraphe 1.1.

En allant encore plus loin, on peut poser la question suivante.

Question 1.9. Soient G un groupe de Lie réel semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface τ-quasi-fuchsiens qui soient « arbitrairement proches » de groupes τ-fuchsiens, dans un sens à spécifier ?

Les théorèmes 2.4 et 2.17 ci-dessous suggèrent une réponse affirmative à cette question dans le cas des réseaux cocompacts, pour certains couples (G,τ) qui couvrent tous les groupes G du théorème principal.

Les constructions de Long–Reid–Thistlethwaite, Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes permettent, pour nombre de réseaux arithmétiques de G, d'obtenir des sous-groupes de surface qui sont Zariski-denses dans G : ce sont alors des sous-groupes