Séminaire BOURBAKI Janvier 2023
74e année, 2022–2023, no 1201, p. 141 à 197
doi : 10.24033/ast.1210

LA CONJECTURE DU FACTEUR DIRECT
[*d'après* André et Bhatt]

par **Gabriel Dospinescu**

La conjecture du facteur direct (théorème 1.1 ci-dessous) est un énoncé d'algèbre commutative presque aussi élémentaire que le Théorème de Fermat et qui est resté ouvert pendant près de 50 ans : énoncée en 1969 (*cf.* Hochster (1973) pour la version publiée), elle a été démontrée par André en 2016 (*cf.* André (2018b) pour la version publiée). Cet énoncé fait partie d'un faisceau de conjectures, les « conjectures homologiques » dont la liste et les relations donnent un peu le tournis [(1)]. En particulier, Hochster (1975, 1983) avait prouvé que l'existence de A-algèbres (ou même seulement de A-modules) de Cohen–Macaulay (voir § 1.5), pour tout anneau local noethérien A, impliquait la plupart de ces conjectures, par exemple celle du facteur direct. Hochster et Huneke (1992) avaient aussi montré [(2)] l'existence de telles A-algèbres dans le cas d'égale caractéristique, *i.e.* quand A contient un corps.

Le but de cet exposé est d'expliquer les techniques introduites par André dans ses trois articles monumentaux (André, 2018a,b, 2020), en particulier comment les espaces perfectoïdes introduits par Scholze (2012) permettent de construire des algèbres de Cohen–Macaulay pour les anneaux locaux noethériens d'inégale caractéristique et donc de prouver la conjecture du facteur direct. [(3)] Les travaux récents et spectaculaires de Bhatt (2020) poussent encore plus loin les techniques perfectoïdes (via la théorie prismatique de Bhatt et Scholze (2022) et la correspondance de Riemann–Hilbert p-adique de Bhatt et Lurie (2023)) et établissent (théorème 1.16 ci-dessous) un analogue en inégale caractéristique d'un célèbre théorème de Hochster et Huneke (1992) (en caractéristique positive), qui implique tous les résultats exposés ici, et bien plus.

[(1)] Voir le théorème 1.12 pour un condensé loin d'être exhaustif, ainsi que Hochster (1983, 2007) et Roberts (1992).

[(2)] L'existence de A-modules de Cohen–Macaulay pour A d'égale caractéristique avait été établie bien avant, *cf.* Hochster, 1975.

[(3)] Que les espaces perfectoïdes soient un outil indispensable en théorie de Hodge p-adique ne faisait guère de doute après leurs premières applications spectaculaires (Scholze, 2012, 2013, 2015). Qu'ils puissent aussi résoudre les conjectures homologiques était moins clair : la plupart de ces problèmes concernent des anneaux noethériens, propriété quasiment jamais satisfaite par les anneaux perfectoïdes.

La preuve du résultat de Bhatt est un véritable tour de force, et tous les détails ne sont pas encore (à notre connaissance) disponibles, nous avons donc décidé de nous concentrer sur les articles d'André dans cet exposé, en fournissant des preuves complètes (autant que faire se peut) des résultats principaux des trois articles mentionnés ci-dessus, tout en utilisant des idées de Bhatt (2018) pour simplifier certains arguments. [(4)] Le chemin que nous avons choisi pour arriver à la preuve de la conjecture du facteur direct n'est pas le plus court (la géodésique se trouve dans l'article Bhatt, 2018) ; il nous fera visiter des résultats plus puissants que la conjecture elle-même. Pour des applications de ces idées et techniques à la théorie (naissante) des singularités en caractéristique mixte nous renvoyons aux travaux de Ma et Schwede (2018, 2021) et Ma, Schwede et al. (2022) (entre autres) et pour de vastes généralisations des résultats présentés ici le lecteur pourra consulter le livre (de longueur presque infinie...) de Gabber et Ramero (2018).

Convention : Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires, et les morphismes d'anneaux sont unitaires. Si I est un idéal d'un anneau A, on dit que A est *I-complet* si A est séparé complet pour la topologie I-adique. Pour $a \in A$ on dit que A est *a-complet* si A est aA-complet, et on note $A/a := A/aA$. On note $A[I]$ l'idéal de A des éléments annulés par tous les éléments de I. Si $a_1, \dots, a_d$ sont des éléments de A, on note $(a_1, \dots, a_d) = \sum_{i=1}^{d} a_i A$ l'idéal de A qu'ils engendrent.

Remerciements. — Mes plus vifs remerciements vont à Yves André, Bharghav Bhatt, Nicolas Bourbaki, Kęstutis Česnavičius, Pierre Colmez, Luc Illusie, Wiesława Nizioł et Olivier Taïbi. Leurs commentaires et leurs suggestions ont permis au béotien du sujet d'éviter bon nombre de pièges et ont grandement amélioré le contenu et la lisibilité de ce rapport. Je remercie tout particulièrement Yves André pour sa disponibilité, son enthousiasme et ses multiples remarques.

1. Les multiples visages de la conjecture

Le but de cette section est d'énoncer les principaux résultats d'algèbre commutative « classique » [(5)] démontrés par André et Bhatt, et d'expliquer les liens qu'ils entretiennent.

[(4)]On trouvera deux preuves de l'existence de A-algèbres de Cohen–Macaulay dans ce rapport. Elles partagent un ingrédient fondamental, le lemme de platitude d'André ; l'une utilise le théorème de presque pureté de Faltings (1988, 2002), raffiné et étendu par Scholze (2012) et par Kedlaya et Liu (2015), l'autre n'en fait pas usage.

[(5)]Les perfectoïdes n'apparaissent donc pas dans cette section. Le lecteur trouvera dans André (2018c) un survol des preuves fait par le maître, et qui semble impossible à dépasser en terme de présentation.

1.1. Les anneaux réguliers, sources de problèmes

Un anneau local noethérien A de dimension d est dit *régulier* si son unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ est engendré par d éléments (c'est le nombre minimal possible de générateurs). Des exemples typiques de tels anneaux sont les anneaux locaux des variétés algébriques lisses sur un corps (ou sur un anneau de valuation discrète), ainsi que leurs complétés, par exemple $K[[X_1, \dots, X_n]]$ (K étant un corps ou un anneau de valuation discrète), mais aussi $\mathbf{Z}_p[[X, Y, Z]]/(p - X^5 - Y^7 - Z^9)$, etc.

En dépit de leur définition très simple, les anneaux locaux réguliers sont une source inépuisable de problèmes délicats, et il n'est pas facile d'établir même des propriétés très basiques comme la stabilité de la régularité par localisation en un idéal premier (cela se déduit de l'interprétation homologique de la régularité fournie par le théorème de Serre), ce qui permet de globaliser [6] la notion de régularité. Il n'est pas difficile de montrer que tout anneau local régulier est intègre, mais il faut se fatiguer un peu pour montrer qu'il est normal [7], et bien plus pour montrer qu'il est même factoriel (théorème d'Auslander–Buchsbaum).

Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local régulier, son complété $\hat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$ est un anneau local régulier complet (pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique), et le théorème de structure de Cohen montre que $\hat{A}$ a l'une des formes suivantes, à isomorphisme près :

• ou bien $V[[X_1, \dots, X_n]]$ avec V un corps ou un anneau de valuation discrète complet et non ramifié (*i.e.* l'idéal maximal de V est engendré par un nombre premier p). On dira alors que $\hat{A}$ est *non ramifié* ;

• ou bien $V[[X_1, \dots, X_n]]/(p - f)$ pour un anneau de valuation discrète complet et non ramifié V, de caractéristique résiduelle p, et un élément f dans $(p, X_1, \dots, X_n)^2$ mais pas dans $pV[[X_1, \dots, X_n]]$ (on dira que $\hat{A}$ est *ramifié* dans ce cas).

1.2. Énoncé de la conjecture du facteur direct

La conjecture du facteur direct de Hochster (1973), à laquelle cet exposé est consacré, est l'énoncé suivant, à l'air parfaitement innocent :

Théorème 1.1. *Toute extension finie d'un anneau régulier est scindée.*

Précisons l'énoncé : une *extension d'anneaux* est un morphisme injectif d'anneaux $f\colon A \to B$, elle est dite *finie* si f fait de B un A-module de type fini, et *scindée* si A est un facteur direct du A-module B, autrement dit s'il existe une application A-linéaire [8] $r\colon B \to A$ telle que $r(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$.

[6] Un anneau noethérien est régulier si ses localisés en des idéaux premiers quelconques sont des anneaux locaux réguliers.

[7] Autrement dit intégralement clos dans son corps des fractions.

[8] On ne demande pas à r d'être un morphisme d'anneaux.

Remarque 1.2. Bhatt (2018) revisite et simplifie la preuve d'André (2018b), ce qui lui permet d'établir la version dérivée suivante du théorème 1.1, conjecturée par de Jong : si A est un anneau régulier et si $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme propre et surjectif, alors le morphisme $A \to \mathrm{R}\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ est scindé dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(A)$. Si A est une $\mathbf{Q}$-algèbre cela se déduit des travaux de Kovács (2000), le cas $\mathrm{car}(A) = p$ avait été traité par Bhatt (2012).

Hochster (1973) a démontré le théorème 1.1 pour les anneaux réguliers contenant un corps, et a réduit, par un argument très indirect (*cf.* théorème 6.1 de Hochster, 1983) le cas général à celui d'un anneau local régulier complet, non ramifié, de corps résiduel algébriquement clos. Une avancée spectaculaire est due à Heitmann (2002) : il a démontré la conjecture quand $\dim A = 3$ (le cas $\dim A \leqslant 2$ est une conséquence de la formule d'Auslander–Buchsbaum).

Le lien entre les techniques perfectoïdes (plus précisément les presque mathématiques et le théorème de presque pureté de Faltings (1988, 2002)) et la conjecture du facteur direct semble avoir été remarqué depuis un certain temps [(9)], mais ce n'est qu'en 2014 que Bhatt (2014a) a obtenu le premier résultat un peu général via ces techniques, en traitant le cas où $B[\frac{1}{p}]$ est étale sur $A[\frac{1}{p}]$ (et même sous des hypothèses plus faibles). C'est ce cercle d'idées qui mènera à la preuve de la conjecture, mais il a fallu attendre les travaux d'André (2018a,b) pour traiter le cas général.

Remarque 1.3. a) Une extension finie $f\colon A \to B$ d'anneaux noethériens est scindée si et seulement si l'extension induite $A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m}$ l'est pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A : l'existence d'un scindage équivaut à la surjectivité de l'application [(10)]

$$\mathrm{ev}_1\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(B, A) \to A,\ r \mapsto r(1),$$

qui peut se tester en localisant en tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, or

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(B, A)_\mathfrak{m} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_\mathfrak{m}}}(B_\mathfrak{m}, A_\mathfrak{m})$$

puisque B est un A-module de présentation finie. De même, f est scindée si et seulement si l'extension $C \to C \otimes_A B$ l'est pour une extension fidèlement plate C de A, car on peut tester la surjectivité de ev_1 après changement de base à C.

(9) Par exemple, voici ce que m'écrit Wiesława Nizioł : « in 2001 Lorenzo Ramero visited me in Utah and gave a talk at the Number Theory seminar on his work with Gabber and their attempt to prove the almost purity conjecture. Paul Roberts was in the audience and was really surprised by the similarity of almost math techniques with the recent proof by Heitmann of the direct summand conjecture in dim 3. Heitmann worked in the almost setting and then at some point was able to descend to the usual setting (via some finiteness properties ?). Roberts got all excited about this and we had a seminar running for a semester on almost math and commutative algebra. It did not get anywhere because, of course, we did not have the almost purity in general at that time. »

(10) On note Mod_A la catégorie des A-modules.

b) La preuve du théorème 1.1 se ramène au cas d'une extension finie $f\colon A \to B$ avec A local régulier complet et B intègre (donc local et complet). En effet, par a) on peut supposer que A est local, puis complet, en utilisant l'extension fidèlement plate $A \to \widehat{A}$. Si $\wp$ est un idéal premier de B tel que $\dim(B/\wp) = \dim B$, alors $\dim A/(\wp \cap A) = \dim A$, puis $\wp \cap A = \{0\}$ (car A est local et intègre), et tout scindage de l'extension finie $A \to B/\wp$ en fournit un pour $A \to B$.

c) Si A est une $\mathbf{Q}$-algèbre intègre et normale, alors toute extension finie $f\colon A \to B$ est scindée. En effet, comme dans b) on peut supposer que B est intègre. Si K et L sont les corps des fractions de A et de B, par normalité de A la trace $\mathrm{Tr}_{L/K}\colon L \to K$ envoie B dans A, et $\frac{1}{[L:K]}\mathrm{Tr}_{L/K}\colon B \to A$ fournit un scindage. Donc pour les $\mathbf{Q}$-algèbres le théorème 1.1 est trivial, et pas optimal.

d) Si $\dim A \leqslant 2$ le théorème 1.1 se déduit de la formule d'Auslander–Buchsbaum. Si A est de caractéristique positive on dispose de toute une variété de preuves pas (trop) difficiles du théorème 1.1, voir l'exemple 1.3 de Bhatt (2012) pour une preuve cohomologique, et le paragraphe 6.2 de Hochster (1983) pour une preuve courte.

1.3. Fragmenteurs

Appelons *fragmenteur* (*splinter* en anglais) un anneau intègre A tel que toute extension finie de A soit scindée. Le théorème 1.1 affirme que les anneaux réguliers sont fragmenteurs. Tout fragmenteur est normal [11], et la réciproque est vraie pour les $\mathbf{Q}$-algèbres intègres (remarque 1.3). La situation est nettement plus compliquée en caractéristique positive ou mixte. Hochster et Huneke (1992, 1995) ont montré que les fragmenteurs noethériens de caractéristique positive et localement excellents [12] sont des anneaux de Cohen–Macaulay, et Bhatt (2020) vient de montrer, dans son travail spectaculaire, que cela reste vrai en caractéristique mixte (toujours sous des hypothèses d'excellence).

Une source importante de fragmenteurs est la théorie des représentations des groupes (linéairement) réductifs : si un tel groupe G agit sur une k-algèbre R qui est un anneau régulier (k étant un corps), alors l'anneau des invariants R^G est un fragmenteur (car l'inclusion $R^G \to R$ est scindée, via l'opérateur de Reynolds, R est un fragmenteur, et un facteur direct d'un fragmenteur en est encore un).

Voici un exemple (dû à Hochster, 1973) d'anneau normal, de Cohen–Macaulay (même intersection complète), et non fragmenteur. Soient k un corps de caractéristique 2 et $R = k[X,Y,Z]/(X^3+Y^3+Z^2) = k[x,y,z]$. Le morphisme $R \to k[U,V]$ envoyant x,y,z sur U^2, V^2, U^3+V^3 est fini, injectif et non scindé : s'il était scindé on aurait $R \cap Ik[U,V] = I$ pour tout idéal I de R, or $z \notin (x,y)$ et $U^3+V^3 \in (U^2,V^2)$.

(11) Si $x \in \mathrm{Frac}(A)$ est entier sur A, alors $A \to A[x]$ est une extension finie et elle n'est pas scindée si $x \notin A$, puisque toute rétraction A-linéaire $r\colon A[x] \to A$ doit envoyer x sur lui-même (si $x = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in A$ et $b \neq 0$, alors $a = r(a) = r(bx) = br(x)$).

(12) *i.e.* dont les localisés en tout idéal maximal sont excellents.