Séminaire BOURBAKI Janvier 2023
74e année, 2022–2023, no 1203, p. 225 à 249
doi : 10.24033/ast.1212

ALGÈBRES DE VON NEUMANN, PRODUITS TENSORIELS, CORRÉLATIONS QUANTIQUES ET CALCULABILITÉ
[*d'après* Ji, Natarajan, Vidick, Wright et Yuen]

par **Mikael de la Salle**

Introduction

Le but de ce texte est de présenter la résolution récente de problèmes qui sont longtemps restés ouverts en algèbres d'opérateurs. Commençons par les énoncer.

Le problème de plongement de Connes (1976) demande si tout facteur II_1 admet un plongement approximatif dans le facteur II_1 hyperfini $\mathscr{R}$. Autrement dit, s'il peut être réalisé comme une sous-algèbre de von Neumann d'un ultraproduit d'algèbres de matrices. C'est une façon précise de demander si les algèbres de matrices forment un modèle suffisant pour comprendre tous les phénomènes locaux dans les algèbres de von Neumann finies.

Le problème peut être énoncé de manière équivalente sans avoir à introduire de vocabulaire d'algèbres de von Neumann. Étant donné un groupe Γ, un *caractère* est une fonction $\varphi\colon \Gamma \to \mathbf{C}$ définie positive [(1)], invariante par conjugaison et normalisée par $\varphi(1) = 1$. Les caractères qui interviennent dans la théorie des représentations des groupes finis (de la forme $\gamma \mapsto \frac{1}{d}\mathrm{Tr}(\pi(\gamma))$ pour une représentation unitaire de dimension finie d) sont des exemples de caractères, que nous appellerons caractères de dimension finie. Mais il y en a bien d'autres pour les groupes infinis, par exemple la fonction indicatrice de $\{1\}$, ou plus généralement de tout sous-groupe distingué d'indice infini. Le problème de plongement de Connes est équivalent à la question « Tout caractère du groupe libre à deux générateurs est-il limite simple d'une suite de caractères de dimension finie ? » Si on pose la question seulement pour les caractères de la forme $\varphi = \chi_N$ pour un sous-groupe distingué N, on obtient une autre question importante (elle toujours ouverte) « Tout groupe est-il hyperlinéaire ? », un affaiblissement de la question de Gromov « Tout groupe est-il sofique ? » (qui correspond à demander si χ_N est limite simple de caractères de dimension finie provenant de représentations à valeurs dans les groupes de matrices de permutations).

(1) C'est-à-dire, pour toute famille finie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, la matrice $(\varphi(\gamma_i^{-1}\gamma_j))_{i,j\leqslant n}$ est positive

La conjecture de Kirchberg (1993) porte sur les produits tensoriels de C^*-algèbres. Une façon courte de l'énoncer est : y a-t-il une unique norme de C^*-algèbre sur $\mathscr{C} \otimes \mathscr{C}$, où $\mathscr{C}$ est la C^*-algèbre universelle engendrée par une suite dénombrable d'unitaires. Par la propriété universelle de $\mathscr{C}$, cette conjecture a de nombreuses reformulations très différentes ; le lecteur intéressé pourra en savoir beaucoup plus sur ces formes (et beaucoup d'autres choses) dans le livre de Pisier (2020), qui est entièrement dédié à ce sujet.

Le problème de Tsirelson est lié aux fondements de la mécanique quantique et, via les inégalités de Bell, à la fameuse expérience d'Alain Aspect démontrant le phénomène d'intrication quantique et qui lui a valu le prix Nobel. Dans cette expérience, Aspect mesure des corrélations entre certaines observables entre systèmes physiques. Il observe que celles-ci sont incompatibles avec la théorie des variables cachées proposée par Einstein, Podolski et Rosen, mais qu'elles sont bien compatibles avec le formalisme mathématique de la mécanique quantique reposant sur les espaces de Hilbert. Jusqu'à preuve du contraire, le monde physique est donc bien quantique et les espaces de Hilbert sont nécessaires à sa description. Tsirelson (1980, 1993) étudie différentes variantes de ce formalisme mathématique, et notamment (il y a là un petit raccourci) une distinction entre espaces de dimension finie et espaces de dimension infinie. Tsirelson (1993) affirme, sans preuve, que, pour ces deux modèles, les corrélations possibles sont essentiellement les mêmes, dans le sens où toute corrélation dans le modèle avec des espaces de Hilbert de dimension infinie est une limite de corrélations dans le modèle avec des espaces de dimension finie. C'est en effet naturel, puisqu'un espace de Hilbert est une union filtrante de ses sous-espaces de dimension finie. Ce n'est que dans les années 2000, avec l'explosion de la théorie quantique de l'information, que ces travaux de Tsirelson ont été étudiés attentivement (Navascués, Pironio et Acín, 2008) ; Tsirelson reconnaît alors qu'il a été un peu rapide et son affirmation devient donc le problème de Tsirelson.

De manière remarquable et pas du tout évidente, ces trois problèmes sont équivalents (et sont parfois appelés *conjectures*, même si Kirchberg est le seul à avoir énoncé sa question comme une conjecture). Le chemin le plus délicat, l'équivalence entre le problème de Connes et la conjecture de Kirchberg a été démontrée par Kirchberg, 1993. L'équivalence entre le problème de Tsirelson et la conjecture de Kirchberg a été démontrée plus récemment par Fritz (2012) et Junge et al. (2011) pour une direction, et Ozawa (2013) pour l'autre.

En janvier 2020, la solution de toutes ces questions a été déposée sur arXiv par une équipe de cinq informaticiens.

Théorème 0.1 (Ji et al., 2020a). *Le problème de Connes–Kirchberg–Tsirelson a une réponse négative.*

Autrement dit, il existe un facteur II_1 qui n'est pas plongeable dans un ultraproduit d'algèbres de matrices ; il y a au moins deux normes de C^*-algèbres sur $\mathscr{C} \otimes \mathscr{C}$;

il existe des inégalités de Bell qui distinguent strictement les corrélations quantiques dans le modèle de la mécanique quantique où l'on autorise des espaces de Hilbert de dimension infinie de celles dans le modèle où seuls des espaces de Hilbert de dimension finie (mais arbitraire) sont autorisés. On peut donc imaginer qu'il existe une expérience physique qui pourrait démontrer expérimentalement que les espaces de Hilbert de dimension infinie sont indispensables pour décrire le monde physique...

Le théorème 0.1 est énoncé dans Ji et al. (2020a), mais sa longue preuve est répartie aussi dans Bavarian, Vidick et Yuen (2022) et Ji et al. (2020b, 2022). Elle repose également sur plusieurs autres travaux antérieurs, notamment Natarajan et Wright (2019). Ce travail est très long et difficile. Il repose sur des idées nouvelles, mais aussi sur des décennies d'avancées en informatique théorique, informatique quantique et théorie quantique de l'information. La première version proposée reposait d'ailleurs sur des résultats dont la preuve s'est avérée fausse, et qui ont demandé aux auteurs un travail considérable de correction (Ji et al., 2020b, 2022). Il est illusoire d'en présenter une preuve complète en quelques pages. Le but de ce texte est de présenter de manière très superficielle la stratégie générale de la preuve telle que je la comprends. On s'éloignera par moments de l'approche initiale, en tentant d'être le plus compréhensible possible pour un public de mathématiciens. Par exemple, on essaiera de ne parler de classes de complexité que quand c'est vraiment nécessaire, là où les auteurs de l'article initial concentrent leurs efforts à démontrer un énoncé de complexité (MIP*=RE) dont ils déduisent assez directement le résultat mathématique. L'article original et l'excellent survol de Vidick (2022b) sont des très bons endroits pour comprendre les aspects informatiques. Une autre différence notable est qu'on réfutera directement le problème de Connes, là où les auteurs, sans doute motivés par un sens physique dont je manque cruellement, réfutaient d'abord le problème de Tsirelson. Du point de vue mathématique, cela revient à étudier uniquement des états traciaux sur des algèbres de von Neumann là où les auteurs étudient des états arbitraires, et je pense que cela ajoute beaucoup de difficultés inutiles.

Ce texte est dédié à Eberhard Kirchberg (1946–2022) et Boris Tsirelson (1950–2020), deux grands noms de l'analyse fonctionnelle et protagonistes centraux de cette histoire, qui sont décédés peu après l'annonce de sa résolution.

Je voudrais remercier les très nombreux collègues qui ont accepté de répondre à toutes mes questions, parfois naïves. Les lister tous serait trop long, mais mentionnons au moins les auteurs Thomas Vidick et Henry Yuen, mais aussi Guillaume Aubrun, Laurent Bartoldi, Michael Chapman, Emilie Elkiaer, Omar Fawzi, Cécilia Lancien, Amine Marrakchi, Paul Meunier, Sophie Morel, Étienne Moutot, Alexander Müller-Hermes, Magdalena Musat, Pascal Koiran, Mikael Rørdam, Bruno Sévennec, Todor Tsankov... Je remercie plus particulièrement Guillaume Aubrun et Thomas Vidick pour leur relecture attentive et constructive de ce texte.

1. Algèbres de von Neumann et calculabilité

1.1. Algèbres de von Neumann traciales et approximation par des algèbres de matrices

Une algèbre de von Neumann $\mathscr{M}$ est une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, stable par l'adjoint, contenant l'identité de $\mathscr{H}$ et fermée pour la topologie préfaible [(2)]. Une algèbre de von Neumann est dite finie si elle admet un *état tracial* (ou simplement une trace) $\tau \colon \mathscr{M} \to \mathbf{C}$: une forme linéaire préfaiblement continue, normalisée par $\tau(1) = 1$ et vérifiant $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) > 0$ pour tout $x \in \mathscr{M}$ non nul. La paire $(\mathscr{M}, \tau)$ est appelée une algèbre de von Neumann traciale.

Les exemples évidents d'algèbres de von Neumann traciales sont les algèbres de matrices $(M_d(\mathbf{C}), \mathrm{tr} := \frac{1}{d}\mathrm{Tr})$. Et ces exemples permettent d'en construire beaucoup d'autres avec la technique d'ultraproduit : si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur un ensemble I, et si $d_i \in \mathbf{N}$ pour tout I, on peut définir l'ultraproduit $\prod_{\mathscr{U}} (M_{d_i}(\mathbf{C}), \mathrm{tr})$ comme le quotient de $\prod_i M_{d_i}(\mathbf{C})$, l'espace des suites bornées en norme d'opérateur, par $\{(x_i) \in \prod_i M_{d_i}(\mathbf{C}) \mid \lim_{\mathscr{U}} \mathrm{tr}(x_i^* x_i) = 0\}$. Muni de la trace $\tau((x_i)) = \lim_{\mathscr{U}} \mathrm{tr}(x_i)$, c'est une algèbre de von Neumann traciale. Le problème de plongement de Connes demande s'il y a d'autres algèbres de von Neumann traciales que les sous-algèbres de von Neumann de tels ultraproduits. La construction GNS (Bekka, Harpe et Valette, 2008, Theorem C.4.10) et le fait que toute algèbre de von Neumann traciale finiment engendrée peut être réalisée dans une algèbre de von Neumann traciable engendrée par deux unitaires justifient l'équivalence entre cette forme du problème de Connes et celle donnée dans l'introduction.

1.2. Approximation de caractères et calculabilité

Plutôt que de travailler avec des caractères sur un groupe donné (le groupe libre à deux générateurs) comme dans l'introduction, on travaillera avec une famille de groupes, indexée par les paires (n, m) d'entiers positifs, et on n'étudiera les caractères qu'en restriction à des parties finies de plus en plus grandes. Cela permettra de faire entrer en jeu des notions de calculabilité. Concrètement, notons

- $\Gamma_{n,m} = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{*m}$ le produit libre de m copies du groupe fini cyclique d'ordre n,
- $S_{n,m} \subset \Gamma_{n,m}$ sa partie génératrice finie donnée par l'union des m copies de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$,
- pour tout entier $d \geqslant 1$, $C_d(n, m) \subset \mathbf{C}^{S^2_{n,m}}$ l'enveloppe convexe des restrictions à $S^2_{n,m}$ (la boule de rayon 2, c'est-à-dire l'ensemble des produits de deux éléments de $S_{n,m}$) de caractères de dimension $\leqslant d$ de $\Gamma_{n,m}$,

(2) $B(\mathscr{H})$ est le dual des opérateurs à trace sur $\mathscr{H}$

- ▷ $C_{<\infty}(n,m) = \cup_d C_d(n,m)$.
- ▷ pour tout $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(n,m)$ le plus petit entier d tel que $C_\infty(n,m)$ est contenu dans le ε-voisinage [(3)] de $C_d(n,m)$.

L'énoncé suivant est une variante d'arguments de Navascués, Pironio et Acín (2008).

Proposition 1.1. *Si le problème de plongement de Connes avait une réponse positive, alors la fonction $(k,n,m) \mapsto f_{\frac{1}{k}}(n,m)$ serait majorée par une fonction calculable $\mathbf{N}^3 \to \mathbf{N}$.*

Démonstration. Supposons que le problème de Connes ait une réponse positive. En particulier, pour tout n, m, $C_{<\infty}(n,m)$ est dense dans $C(n,m)$, l'ensemble des restrictions à $S^2_{n,m}$ de caractères de $\Gamma_{n,m}$. Être un caractère, c'est donné par une famille dénombrable d'inégalités, que l'on peut énumérer explicitement. Notons $C^d(n,m)$ le polytope calculable donné comme les restrictions à $S^2_{n,m}$ des fonctions ne vérifiant que les d premières inégalités. Clairement, $C^d(n,m)$ décroît vers $C(n,m)$. On a donc une approximation *par dessus* de $C(n,m)$. En parallèle, en décrivant une partie $\frac{1}{d}$-dense des matrices unitaires de taille d et d'ordre n, on peut obtenir une suite calculable contenue dans $C_d(n,m)$ et approchant $C_{<\infty}(n,m)$ *par dessous*. Le plus petit d tel que l'approximation par dessous est $\frac{1}{k}$-dense dans l'approximation par dessus est donc fini (car on a supposé que $C_{<\infty}(n,m)$ est dense dans $C(n,m)$) et calculable. C'est clairement un majorant de $f_{\frac{1}{k}}(n,m)$. □

Le théorème principal est

Théorème 1.2 (Ji et al., 2020a)**.** *La fonction $(k,n,m) \mapsto f_{\frac{1}{k}}(n,m)$ n'est pas majorée par une fonction calculable.*

Il a toujours été clair pour moi que la raison pour laquelle le problème de plongement de Connes ou la conjecture de Kirchberg étaient difficiles est qu'il y a beaucoup de choses qu'on ne comprend pas dans les algèbres d'opérateurs de dimension infinie (et en particulier dans la notion de commutation en dimension infinie), contrairement à la dimension finie où tout est limpide. Il est frappant que le théorème 1.2, duquel la réfutation du problème de Connes découle directement, ne porte pas du tout sur les algèbres d'opérateurs de dimension infinie. Il affirme, contrairement à l'intuition, que les algèbres d'opérateurs de dimension finie sont *extrêmement compliquées*, non pas du point de vue leur description mathématique, mais du point de vue de la calculabilité.

(3) Pour fixer les idées, disons qu'on a muni $\mathbf{C}^{S^2_{n,m}}$ de la norme ℓ_∞, mais n'importe quelle autre norme raisonnable (dans le sens comparable à la norme ℓ_∞ à des constantes calculables près) conviendrait. L'existence de $f_\varepsilon(n,m)$ est immédiate par compacité.