Séminaire BOURBAKI Avril 2023
74e année, 2022–2023, no 1204, p. 251 à 284
doi : 10.24033/ast.1213

LE GROUPE DES HOMÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE DE DIMENSION 2 QUI RESPECTENT L'AIRE ET L'ORIENTATION N'EST PAS UN GROUPE SIMPLE.
[*d'après* D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière et S. Seyfaddini]

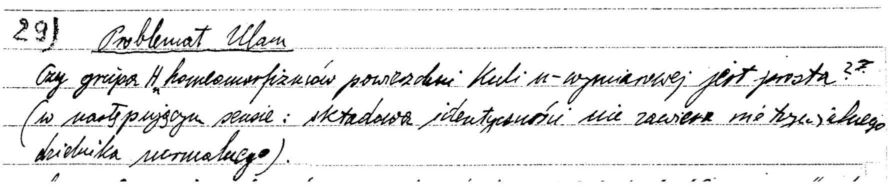
par **Étienne Ghys**

1. Un peu de contexte

Le théorème énoncé dans le titre a des racines anciennes.

1.1. La préhistoire

1.1.1. *Les groupes d'homéomorphismes.* — La question suivante était déjà posée par Ulam (1935) dans le « Księga Szkocka », plus connu sous le nom de « Scottish Book » [(1)].


29) Problemat Ulam
Czy grupa H_n homeomorfizmów powierzchni kuli n-wymiarowej jest prosta??
(w następującym sensie: składowa identyczności nie zawiera nietrywialnego dzielnika normalnego).

29) <u>Problème d'Ulam</u>
Le groupe H_n de tous les homéomorphismes de la surface de la sphère de dimension n est-il simple ? (dans le sens suivant : la composante de l'identité ne contient pas de sous-groupe distingué non trivial).

Le cas du cercle ($n = 1$) avait été résolu une année auparavant par Schreier et Ulam (1934). Ulam et von Neumann (1947) annoncèrent ensuite une solution pour $n = 2$. Anderson (1958) et Fisher (1960) résolurent le cas $n \leqslant 3$ mais leurs démonstrations se généralisèrent immédiatement en toute dimension une fois que le théorème de Schoenflies généralisé et la conjecture de l'anneau furent établis pour tout n.

(1) Le problème 28, proposé par Mazur, promettait une bouteille de vin à celui qui le résoudrait. Mais aucune récompense n'était prévue pour le problème 29.

1.1.2. *Les difféomorphismes.* — La question bien plus difficile dans le cas des *groupes de difféomorphismes* fut abordée par Epstein (1970), Herman (1971, 1973), Thurston (1974) et Mather (1975) dans une série d'articles impressionnants. Le résultat suivant de Thurston avait été conjecturé par Smale : *la composante neutre du groupe des difféomorphismes de classe C^∞ et à support compact d'une variété connexe est un groupe simple, en toute dimension* [(2)].

1.1.3. *Les difféomorphismes qui préservent le volume ou une forme symplectique.* — Tout naturellement, il s'agissait ensuite d'étudier les difféomorphismes qui préservent une structure additionnelle, comme une forme de volume ou une forme symplectique. Ce sont en effet des exemples emblématiques de groupes de Lie de dimension infinie. Le théorème final fut annoncé [(3)] par Thurston (1973) dans un article « à paraître » qui n'est jamais paru. L'article et le livre de Banyaga (1978, 1997) contiennent en revanche des preuves complètes (voir aussi le complément de Rousseau, 1978).

La situation est alors plus délicate car les groupes correspondants ne sont pas toujours simples.

Soit M une variété différentiable connexe et vol une forme de volume de masse totale finie. Notons $\mathrm{Diff}(M, vol)$ le groupe des difféomorphismes de M (de classe C^∞), à support compact, qui respectent vol. Soit $\mathrm{Diff}_0(M, vol)$ la composante connexe de l'identité et $\widetilde{\mathrm{Diff}}_0(M, vol)$ son revêtement universel. On peut alors définir un homomorphisme, appelé *flux*, de $\widetilde{\mathrm{Diff}}_0(M, vol)$ vers le premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbf{R})$ de la manière suivante. Soit $f_{t\in[0,1])}$ un chemin dans $\mathrm{Diff}(M, vol)$ reliant l'identité f_0 à un difféomorphisme $f = f_1$. Pour chaque point $x \in M$, le chemin $c_x : t \in [0, 1] \mapsto f_t(x)$ peut être considéré comme un 1-courant (dont le bord est $f(x) - x$). L'intégrale sur M de c_x par rapport à vol est un 1-cycle dont la classe d'homologie ne dépend que de la classe d'homotopie de f_t à extrémités fixes. Cela définit le flux

$$\Phi : \widetilde{\mathrm{Diff}}_0(M, vol) \to H_1(M, \mathbf{R})$$

qui s'avère être surjectif et qui descend en un homomorphisme

$$\phi : \mathrm{Diff}_0(M, vol) \to H_1(M, \mathbf{R})/\Phi(\pi_1(\mathrm{Diff}(M, vol))).$$

En dimension $n \geqslant 3$, le noyau de ϕ est un groupe simple.

Soit maintenant M une variété symplectique connexe et ω une forme symplectique de volume fini. Notons $\mathrm{Diff}(M, \omega)$ le groupe des difféomorphismes de M (de classe C^∞), à support compact, qui respectent ω. Soit $\mathrm{Diff}_0(M, \omega)$ la composante

(2) Voir Mann (2016) pour une preuve simplifiée et moderne.

(3) McDuff (1980) écrit : « Unfortunately Thurston's proof has remained unpublished. However his results were later generalized by Banyaga to the symplectic case, and one can (with some difficulty) reconstruct Thurston (1973)'s argument ».

connexe de l'identité et $\widetilde{\mathrm{Diff}}_0(M,\omega)$ son revêtement universel. Puisqu'un difféomorphisme symplectique respecte le volume, on dispose de l'homomorphisme flux Φ défini sur $\widetilde{\mathrm{Diff}}_0(M,\omega)$, comme précédemment. Si M est compacte, Banyaga et Thurston démontrent que le noyau du flux est simple. En revanche, lorsque M est non compacte, le noyau $ker(\Phi)$ du flux, n'est pas simple : il est muni d'un homomorphisme $\mathscr{C}al$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ dont le noyau est simple. Nous reviendrons plus loin sur la définition de cet invariant introduit par Calabi (1970) [(4)].

1.1.4. *Les difféomorphismes des surfaces qui préservent l'aire.* — En dimension 2 une forme symplectique n'est autre qu'une forme d'aire. La situation est parfaitement comprise dans le cas des surfaces mais pour ne pas alourdir la discussion, limitons-nous ici aux deux cas qui seront au cœur de cet exposé : la sphère et le disque. Puisque ces deux exemples sont simplement connexes, nous n'aurons pas à nous préoccuper du flux. En dimension 2, nous noterons plutôt *aire* une forme de « volume ». Nous considérons *aire* tantôt comme une mesure et tantôt comme une 2-forme différentielle.

Le groupe $\mathrm{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, aire)$ *des* ***difféomorphismes*** *de la sphère qui respectent l'aire est simple*.

Pour le disque *fermé* $\mathbf{D}^2$, on note $\mathrm{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$ le groupe des difféomorphismes qui respectent l'aire et qui sont l'identité près du bord. C'est aussi le groupe des difféomorphismes à support compact du disque ouvert qui respectent l'aire.

Le noyau de l'homomorphisme de Calabi $\mathrm{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire) \to \mathbf{R}$ *est un groupe simple.*

1.1.5. *Les homéomorphismes qui préservent le volume.* — Il fallait étudier également les *homéomorphismes* qui préservent le volume. Cela fut fait dans un article remarquable de Fathi (1980a). Tout d'abord, il généralisa la définition du flux au groupe $\mathrm{Homéo}_0(M, vol)$, composante neutre du groupe des homéomorphismes à support compact qui respectent le volume. Surtout, il démontra qu'**en dimension** $\geqslant 3$ *le noyau du flux est un groupe simple*.

(4) C'est l'occasion de rendre hommage à Eugenio Calabi, qui fêtera son centième anniversaire le 11 mai 2023.

1.2. Les homéomorphismes du disque et de la sphère qui préservent l'aire

Le cas des surfaces, et tout particulièrement de la sphère et du disque de dimension 2, a résisté à de nombreux efforts depuis une quarantaine d'années. Les théorèmes de Cristofaro-Gardiner, Humilière et Seyfaddini (2020, 2021) sont une surprise [5] :

*Le groupe des **homéomorphismes** de la sphère de dimension 2 qui respectent l'aire et l'orientation n'est **pas** un groupe simple.*

*Le groupe des **homéomorphismes** du disque de dimension 2 qui respectent l'aire et qui coïncident avec l'identité près du bord n'est **pas** un groupe simple.*

La démonstration est un tour de force et fait largement usage de l'homologie de Floer.

La construction explicite d'un sous-groupe distingué n'est pas difficile mais il faut montrer qu'un homéomorphisme très facile à décrire n'est pas dans ce sous-groupe. Hélas, la nature du groupe quotient reste mystérieuse, même si nous en décrirons quelques propriétés.

Ce théorème a été immédiatement précisé et généralisé dans plusieurs prépublications très récentes, avec des méthodes assez différentes. Nous évoquerons plus loin quelques-uns de ces résultats, malheureusement trop superficiellement.

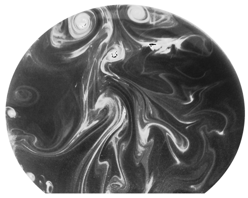
Il est peut-être utile de préciser qu'il s'agit de simplicité au sens algébrique : un groupe est simple s'il ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial. Pour un groupe topologique on parle de *simplicité topologique* s'il n'existe pas de sous-groupe distingué *fermé* non trivial. Nous verrons que *le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension 2 qui respectent l'aire et l'orientation **est topologiquement simple** lorsqu'on le munit de la topologie de la convergence uniforme.*

1.2.1. *Pourquoi s'intéresser aux homéomorphismes ?* — On peut légitimement se demander s'il est utile de dépenser tant d'énergie [6] pendant quarante ans pour étudier les groupes d'homéomorphismes qui préservent l'aire alors que la situation des difféomorphismes est connue depuis longtemps.

[5] Surprise pour l'auteur de ce texte qui a longtemps tenté de démontrer le contraire. En revanche, ce n'est pas une surprise pour McDuff et Salamon (2017) (problem 42) qui avaient fait la « bonne » conjecture.

[6] Nous verrons en effet qu'il faut une énergie infinie.

Une première réponse est de nature physique : il suffit d'observer une rivière pour comprendre que le flot n'est pas de classe C^∞. Une solution classique de l'équation d'Euler pour un fluide parfait incompressible de dimension 2 est donnée par un *tourbillon ponctuel*. Après un temps t un point de coordonnées polaires (r, θ) est transporté au point $(r, \theta + t/r^2)$. Il s'agit d'homéomorphismes non différentiables à l'origine. S'il y a plusieurs tourbillons en interaction, le mouvement global ressemble à celui du lait dans une tasse de café. La dynamique d'un ensemble de k tourbillons ponctuels est un système hamiltonien dans $\mathbf{R}^{2k}$ qui peut être considéré comme une approximation de l'équation d'Euler (ARNOLD et KHESIN, 1998). Beaucoup de topologues rêvent depuis longtemps (à ce jour sans succès) de développer une étude topologique de la dynamique des fluides, qui serait fondée sur la topologie algébrique, sans la moindre dérivée (voir par exemple D. SULLIVAN, 2011).


Le lait dans le café.

On peut aussi décrire beaucoup de situations très naturelles d'homéomorphismes non lisses qui préservent l'aire. Par exemple, le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ agit linéairement sur le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ en préservant l'aire. En passant au quotient par l'involution $x \mapsto -x$, on obtient une action *non lisse* de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ sur la sphère. Les homéomorphismes des surfaces qu'on appelle *difféomorphismes pseudo-Anosov* préservent l'aire mais ce ne sont pas des difféomorphismes !

De manière plus fondamentale, il faut rappeler que l'article de GROMOV (1987) intitulé « Soft and hard symplectic geometry » a inauguré l'étude de la *topologie symplectique*. Le théorème de rigidité affirme qu'un difféomorphisme qui est la limite uniforme (en topologie C^0) d'une suite de difféomorphismes symplectiques est nécessairement symplectique. Cela conduit à définir un *homéomorphisme symplectique* comme la limite uniforme d'une suite de difféomorphismes symplectiques. Cela signifie-t-il qu'on peut caractériser les homéomorphismes symplectiques en termes uniquement qualitatifs ? Comprendre la structure des homéomorphismes des surfaces qui respectent l'aire est un premier pas vers l'étude des homéomorphismes symplectiques en toute dimension. Il s'agit en quelque sorte de faire passer la mécanique analytique classique du stade de la géométrie différentielle, à la Lagrange, au stade de la topologie.

Il y a bien sûr bien d'autres problèmes actuels de nature algébrique sur les groupes d'homéomorphismes. On en trouvera une présentation très accessible dans MANN (2021).

1.2.2. *Cet exposé.* — Même si les articles de Cristofaro-Gardiner, Humilière et Seyfaddini sont remarquablement écrits, ils sont très longs et parfois techniques. Dans le cadre de cet exposé introductif, qui n'est pas destiné aux spécialistes, je ne peux que présenter le contexte ainsi que les outils utilisés dans la preuve, sans prétendre donner une preuve de ces beaux résultats.