

**NON-UNICITÉ DES SOLUTIONS DU SYSTÈME
DE NAVIER–STOKES AVEC TERME SOURCE**
[d’après Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo]

par Anne-Laure Dalibard

1. Introduction

Le système de Navier–Stokes décrit l’évolution des fluides visqueux incompressibles. Il traduit la conservation locale de la quantité de mouvement, et s’écrit, en dimension d et lorsque le fluide est soumis à une force extérieure,

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nu \Delta u &= f & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ \operatorname{div} u &= 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t = 0, x) &= u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (1)$$

où $u: [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ désigne le champ de vitesse du fluide, $p: [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ le champ de pression, et $f: [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ la force appliquée au fluide. Les opérateurs différentiels ∇ , div et Δ agissent ici sur la variable spatiale $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction $u_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est la donnée initiale du champ de vitesse, et le paramètre $\nu > 0$ est la viscosité du fluide. Lorsque $\nu = 0$, c’est-à-dire lorsque les forces de viscosité sont absentes du fluide, le système porte le nom d’équation d’Euler, et ses propriétés mathématiques sont différentes. En effet, le terme de dissipation $-\nu \Delta u$ a un effet régularisant qui joue un rôle fondamental dans les théories d’existence et d’unicité des solutions. La force extérieure f et la donnée initiale u_0 sont des données du problème, tandis que (u, p) est l’inconnue. Au moins formellement, si la solution u est régulière et suffisamment décroissante à l’infini, on peut déterminer p en prenant la divergence de la première équation, *i.e.*

$$-\Delta p = \operatorname{div}((u \cdot \nabla)u).$$

Ce texte est consacré à un problème difficile, resté longtemps ouvert, et résolu récemment par ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) en s’appuyant sur les travaux de VISHIK (2018a,b) (revisités par ALBRITTON, BRUÉ, COLOMBO et al., 2021) : *la non-unicité des solutions faibles (dites de Leray–Hopf) en dimension trois.*

Solutions de Leray : existence globale et non-unicité en dimension trois

Les solutions de Leray s'appuient sur l'observation suivante : si (u, p) est une solution régulière et décroissante à l'infini du système de Navier–Stokes (1), alors, en faisant le produit scalaire de (1) avec u et en intégrant par parties en espace, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla) u(t, x) \cdot u(t, x) dx \\ - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div} u(t, x) p(t, x) dx + \nu \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \cdot u(t, x) dx. \end{aligned}$$

On peut réécrire le terme d'advection $(u \cdot \nabla) u \cdot u$ comme $u \cdot \nabla (|u|^2/2)$. Une intégration par parties et la condition de divergence nulle mènent à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \cdot u(t, x) dx. \quad (2)$$

Soit $T > 0$ quelconque. Supposons que $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)$. L'intégration en temps de (2) et l'utilisation du lemme de Grönwall mènent à l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)} + \nu^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))} \\ \leq C \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d} + \|f\|_{L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

où C est une constante universelle, indépendante de T et de ν . Il apparaît que l'espace $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ est un espace fonctionnel naturel pour chercher des solutions; on l'appellera « espace d'énergie » dans la suite de ce texte. La notion de solution faible introduite par LERAY (1934) et généralisée ensuite par HOPF (1950) au cas de domaines bornés, s'appuie sur l'analyse précédente. On adopte les notations suivantes : si $a, b \in \mathbb{R}^d$, on note $a \otimes b$ la matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$ pour $1 \leq i, j \leq d$. Pour $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, $N = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on note $M : N$ le produit scalaire canonique entre M et N , c'est-à-dire $M : N = \sum_{1 \leq i, j \leq d} m_{ij} n_{ij}$.

Définition 1.1 (Solutions de Leray de (1)). Soit $T > 0$ quelconque.

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ telle que $\operatorname{div} u_0 = 0$, et $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)$. Soit $u \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^d)^d)$.

On dit que u est une solution de Leray de (1) sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si, pour tout $\varphi \in C^1([0, T], H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ tel que $\operatorname{div} \varphi = 0$ et $\varphi(T, x) = 0$ pour tout

$x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(s, x) \cdot \partial_s \varphi(s, x) \, ds \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \cdot \varphi(0, x) \, dx \\ = & -\nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(s, x) : \nabla \varphi(s, x) \, ds \, dx \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(s, x) \otimes u(s, x) : \nabla \varphi(s, x) \, ds \, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) \cdot \varphi(s, x) \, ds \, dx. \end{aligned}$$

Remarque 1.2. Cette définition peut être étendue au cas où $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d) + L^2([0, T], H^{-1}(\mathbb{R}^d)^d)$, où $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ est le dual de $H^1(\mathbb{R}^d)$. L'inégalité d'énergie (3) est alors légèrement modifiée, mais l'espace d'énergie reste le même.

Jean LERAY (1934) a démontré l'existence globale de solutions faibles du système de Navier–Stokes (1) en dimension trois; la preuve s'étend aisément au cas de la dimension deux :

Théorème 1.3. *On suppose que $d \in \{2, 3\}$. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ telle que $\operatorname{div} u_0 = 0$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)^d)$. Alors pour tout $T > 0$, il existe une solution de Leray $u \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ du système de Navier–Stokes (1) sur l'intervalle $[0, T]$.*

LIONS et PRODI (1959) ont démontré en dimension deux l'unicité des solutions de Leray. Cette propriété est liée à une particularité d'invariance par changement d'échelle de l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ lorsque $d = 2$, sur laquelle nous reviendrons dans la prochaine section (voir (8)). En dimension $d = 3$, la question de l'unicité des solutions faibles était restée ouverte depuis les travaux de Leray. Lorsque la donnée initiale est régulière — dans un sens que l'on précisera ultérieurement — on peut construire une unique solution locale en temps, par exemple par une méthode de point fixe. Une telle solution est appelée « solution forte ». De façon remarquable, on a alors un *principe d'unicité « fort-faible »* : si une solution forte existe, alors toutes les solutions de Leray issues de la même donnée initiale coïncident avec la solution forte. Dans ce cas, l'unicité des solutions de Leray est donc acquise sur le temps d'existence de la solution forte. Par conséquent, pour des données initiales et des termes sources réguliers, la question de l'unicité est reliée à celle de la formation de singularités en temps fini pour les solutions de (1), qui est un autre problème ouvert majeur de l'analyse mathématique des équations de la mécanique des fluides. Cependant, on considèrera dans ce texte des termes sources avec peu de régularité (typiquement, avec la régularité requise dans le théorème 1.3 ou dans la Remarque 1.2), pour lesquels il n'existe pas de solution forte⁽¹⁾. La question de l'unicité ne peut donc se réduire au principe d'unicité « fort-faible ». Les travaux

⁽¹⁾En effet, s'il en existait une, le terme source associé serait alors régulier...

de ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) que nous décrirons ici apportent précisément une réponse (négative) à la question de l'unicité en dimension trois :

Théorème 1.4 (Non-unicité des solutions de Leray avec terme source). *Il existe $T > 0$ et $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ tels que le système de Navier–Stokes (1) admette deux solutions de Leray distinctes sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ avec la donnée initiale $u_0 = 0$ et le terme source f .*

Remarque 1.5. L'unicité des solutions de Leray en dimension 3 en l'absence de terme source (i.e. pour $f = 0$) ou dans un domaine à bords demeurent des problèmes ouverts. La non-unicité des solutions de Navier–Stokes avec $f = 0$ dans l'espace $C([0, T], H^\beta(\mathbb{T}^3)^3)$ avec $\beta > 0$ a été obtenue par BUCKMASTER et VICOL (2019) par des méthodes d'intégration convexe, complètement différentes de celles présentées ici. Cependant les solutions ainsi construites sont loin d'avoir la régularité des solutions de Leray : BUCKMASTER et VICOL (2019) montrent que la vorticité $\omega = \nabla \wedge u$ des solutions obtenues par intégration convexe appartient à l'espace $C([0, T], L^1(\mathbb{T}^3)^3)$, mais elle n'est pas *a priori* de carré intégrable.

Schéma de la preuve

La méthode de preuve repose sur une stratégie voisine de celle de GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2014, 2015), qui sera décrite dans la prochaine partie. L'idée fondamentale est de tirer parti de l'invariance par changement d'échelle du système (1) (voir (8) ci-dessous), de façon à transformer la question de la non-unicité des solutions en un problème d'instabilité spectrale. En effet, soit u une solution de Leray de (1), associée à un terme source f . En s'appuyant sur l'invariance par changement d'échelle du système de Navier–Stokes (1) (voir (8) dans la section 2), on introduit les variables auto-similaires $\tau = \ln t$, $\xi = x/\sqrt{t}$, et les fonctions $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{P}$ définies par

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathcal{U}(\tau, \xi), \quad f(t, x) = \frac{1}{t^{3/2}} \mathcal{F}(\tau, \xi), \quad p = \frac{1}{t} \mathcal{P}(\tau, \xi). \quad (4)$$

Dans ces nouvelles variables, le système (1) devient

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathcal{U} - \frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} - \nu \Delta_\xi \mathcal{U} + (\mathcal{U} \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} + \nabla_\xi \mathcal{P} &= \mathcal{F}, \\ \operatorname{div} \mathcal{U} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

La donnée initiale en $t = 0$ devient une donnée en $\tau = -\infty$. Pour $\overline{\mathcal{U}} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$, on note $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$ l'opérateur linéarisé autour de $\overline{\mathcal{U}}$, i.e.

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}: \mathcal{U} \mapsto -\frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} - \nu \Delta_\xi \mathcal{U} + \nabla_\xi \mathcal{P} + (\overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} + (\mathcal{U} \cdot \nabla_\xi) \overline{\mathcal{U}}, \quad (6)$$

où le gradient de pression $\nabla_\xi \mathcal{P}$ assure que $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{U})$ est à divergence nulle. Le domaine de $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$ est $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}) = \{\mathcal{U} \in H^2(\mathbb{R}^3)^3, \operatorname{div} \mathcal{U} = 0, \xi \cdot \nabla_\xi \mathcal{U} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3\}$.

Supposons qu'il existe un champ de vecteur $\overline{\mathcal{U}} \in H^2(\mathbb{R}^3)^3$ à divergence nulle possédant la propriété suivante :

(P) $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$ admet une valeur propre λ de partie réelle strictement négative, relative à une fonction propre $\mathcal{V}_\lambda \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}})$.

Considérons le terme source associé à $\overline{\mathcal{U}}$, c'est-à-dire

$$\overline{\mathcal{F}} := -\frac{1}{2} (1 + \zeta \cdot \nabla_\zeta) \overline{\mathcal{U}} - \nu \Delta_\zeta \overline{\mathcal{U}} + (\overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla_\zeta) \overline{\mathcal{U}}.$$

Alors par construction, $\overline{\mathcal{U}}$ est une solution stationnaire de (5) pour le terme source $\overline{\mathcal{F}}$ et avec une pression nulle, tandis que $\overline{\mathcal{U}} + \Re(e^{-\lambda\tau} \mathcal{V}_\lambda)$ est une solution de (5) avec un terme source $\overline{\mathcal{F}} + O(e^{-2\Re(\lambda)\tau})$. On remarque que le terme de reste $O(e^{-2\Re(\lambda)\tau})$ est négligeable quand $\tau \rightarrow -\infty$ (ce qui correspond à l'asymptotique $t \rightarrow 0$). On s'attend donc à pouvoir construire une solution \mathcal{U}_1 de (5) pour le terme source $\overline{\mathcal{F}}$ sur un intervalle $] -\infty, \tau_0[$ avec $\tau_0 \in \mathbb{R}$, avec \mathcal{U}_1 de la forme

$$\mathcal{U}_1 := \overline{\mathcal{U}} + \Re(e^{-\lambda\tau} \mathcal{V}_\lambda) + \mathcal{W},$$

où \mathcal{W} est un correcteur non linéaire, vérifiant $\mathcal{W} = O(e^{-2\Re(\lambda)\tau})$. En posant

$$u_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathcal{U}_1 \left(\ln t, \frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad u_2(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \overline{\mathcal{U}} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad (7)$$

on vérifie que u_1 et u_2 sont deux solutions distinctes de (1) sur l'intervalle $]0, e^{\tau_0}[$ avec la même donnée initiale $u_0 = 0$ et le même terme source

$$f(t, x) = \frac{1}{t^{3/2}} \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

On remarque en particulier que

$$\begin{aligned} \|u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} &= t^{1/4} \|\overline{\mathcal{U}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0, \\ \|u_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} &\leq t^{1/4} \|\overline{\mathcal{U}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} + O(t^{1/4 - \Re(\lambda)}) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0, \\ \text{et } \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} &= t^{-3/4} \|\overline{\mathcal{F}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}, \end{aligned}$$

de sorte que $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)^3)$. Le résultat de non-unicité du théorème 1.4 s'ensuit.

On constate que le point central de la preuve est l'identification d'un profil $\overline{\mathcal{U}}$ possédant la propriété d'instabilité spectrale (P) mentionnée plus haut. La majeure partie de ce manuscrit sera donc consacrée à cette question. Dans la seconde partie, on rappelle quelques généralités sur le système de Navier-Stokes (invariance d'échelle, solutions fortes, unicité fort-faible), et on esquisse les principaux points de la stratégie de GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2014, 2015), en la comparant à