MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES BENOIST

Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 1-37

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__1_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 1-37

MULTIPLICITÉ UN POUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES EXPONENTIELS

YVES BENOIST (*)

Résumé :

On donne une condition suffisante de non multiplicité pour certaines représentations cycliques liées à des espaces symétriques. On en déduit que si (G,H) est un espace symétrique exponentiel la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité.

A sufficient non multiplicity condition is given for certain cyclic representations which are related to symmetric spaces. In particular, it is proved that if (G,H) is an exponential symmetric space the induced representation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ has no multiplicity.

(*) ERA 1020 du C.N.R.S.,
UER de Mathématiques
2, Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

ESPACES SYMÉTRIQUES EXPONENTIELS

INTRODUCTION :

Soient G un groupe de Lie connexe, σ une involution de G, H l'ensemble des points fixes de σ , H_o sa composante neutre et K un sous-groupe de G tel que $H_o \subset K \subset H$. Un couple (G,K) est appelé un espace symétrique. Il est connu que, dans les deux cas suivants :

i) (G,K) espace symétrique riemannien (i.e. Ad K compact)
ii) $(G_1 \times G_1,\Delta)$ où Δ est la diagonale de $G_1 \times G_1$ (cf. [Ma 1] §.3),

la représentation du groupe G dans l'espace $L^2(G/K)$ est sans multiplicité (i.e. le commutant de cette représentation est commutatif).

Nous nous plaçons dans le cadre des groupes de Lie résolubles. Nous montrons que ce résultat est encore vrai si G a une algèbre de Lie exponentielle (corol. 3.2.1), mais peut être mis en défaut pour un groupe résoluble quelconque (exemple 3.3.2).

Voici la méthode suivie : nous montrons tout d'abord une égalité du type G = HP "décomposition de Cartan" où $P = \{g \in G/g^{-1} = g^\sigma\}$ (prop. 2.1). Nous associons ensuite à chaque élément du commutant une fonction généralisée sur G (l'idée d'une telle association est due à F. Bruhat : [Br] Chap. 6). Cette dernière est "H-semibiinvariante". Nous montrons auparavant une propriété des fonctions généralisées "H-semibiinvariantes" (prop. 2.3). Ceci nous permet de montrer qu'un automorphisme et un antiautomorphisme du commutant coïncident (th. 3.1).

En outre, nous précisons la désintégration de cette représentation sur $\hat{G}$: les représentations unitaires irréductibles qui y interviennent vérifient $\bar{\pi} = \pi^\sigma$ (th. 4.1.2). Nous interprétons ceci en termes de méthode des orbites (th. 4.3.2). Nous terminons par une propriété de ces représentations irréductibles (corol. 4.4.2) liée à notre problème par une dualité de Frobenius.

Nous donnons à nos résultats une certaine généralité de façon à retrouver le cas $(G_1 \times G_1,\Delta)$ ainsi que quelques autres. Ceci a tendance à alourdir les énoncés, mais n'entraîne aucune modification essentielle dans les démonstrations. On peut donc, en première lecture, supposer que G est un groupe exponentiel et que la représentation dont on cherche la désintégration est la représentation de G dans $L^2(G/H)$.

Ces résultats sont annoncés dans [B2], et développés dans la première partie de [B1] où les exemples sont traités de façon plus détaillée.

I. GÉNÉRALITÉS, RAPPELS :

1.1. Notations

1.1.1 Soit M une variété (paracompacte), on note $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^∞) de M à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{K}(M)$ (resp. $\mathcal{D}(M)$) le sous-espace de $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) formé des fonctions à support compact. On note $\mathcal{M}^\infty(M)$ l'espace des densités C^∞ sur M et $\mathcal{M}_c^\infty(M)$ le sous-espace des densités C^∞ à support compact. On munit ces ensembles de leur topologie usuelle.

Soient M et N deux variétés, ϕ et ψ des éléments de $\mathcal{C}(M)$ et $\mathcal{C}(N)$. On note $\phi \otimes \psi$ l'élément de $\mathcal{C}(M \times N)$ donné par, pour (m,n) dans $M \times N$, $(\phi \otimes \psi)(m,n) = \phi(m)\psi(n)$. De même, si f et g sont des difféomorphismes de M et N, on note $f \otimes g$ le difféomorphisme de $M \times N$ donné par, pour (m,n) dans $M \times N$ $(f \otimes g)(m,n) = (f(m),g(n))$. On notera souvent de la même façon une fonction et sa restriction à un sous-ensemble.

Soit $\mathcal{D}'(M)$ l'espace des distributions sur M et $\mathcal{E}'(M)$ l'espace des distributions à support compact. Soient ξ dans $\mathcal{D}'(M)$ et ϕ dans $\mathcal{D}(M)$, on note (ξ,ϕ) ou $(\xi(x),\phi(x))$, avec une lettre muette (notation abusive), l'image de ϕ par ξ . La distribution conjuguée de ξ est notée $\bar{\xi}$. On a donc, par définition $(\bar{\xi},\bar{\phi}) = \overline{(\xi,\phi)}$. Soit $\mathcal{F}(M)$ l'espace des fonctions généralisées sur M (i.e. le dual de $\mathcal{M}_c^\infty(M)$) ; pour T dans $\mathcal{F}(M)$ et μ dans $\mathcal{M}_c^\infty(M)$, on note de même (T,μ) ou $(T(x),\mu(x))$ l'image de μ par T et $\bar{T}$ la fonction généralisée conjuguée de T. Soit f un difféomorphisme de M, on note $f_*(\xi)$ la distribution image de ξ par f : $\forall \phi \in \mathcal{D}(M)$ $(f_*(\xi),\phi) = (\xi,\phi \circ f)$; et on note $T \circ f$ la fonction généralisée image réciproque de T par f : $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$ $(T \circ f,\mu) = (T,f_*(\mu))$.