VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES : ASPECTS GÉOMÉTRIQUES ET ARITHMÉTIQUES

Laurent BONAVERO,
Brendan HASSETT,
Jason M. STARR,
Olivier WITTENBERG

Panoramas et Synthèses

Numéro 31 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 Les Ulis Cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 40 € ($ 60)
Abonnement Europe : 81 €, hors Europe : 90 € ($ 137)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën
Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-339-3

Directeur de la publication : Bernard HELFFER

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 31

VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES : ASPECTS GÉOMÉTRIQUES ET ARITHMÉTIQUES

Laurent BONAVERO, Brendan HASSETT,
Jason M. STARR, Olivier WITTENBERG

avec une introduction de J.-L. Colliot-Thélène

Société mathématique de France 2010
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Laurent Bonavero
Institut Fourier, UFR de Mathématiques, Université de Grenoble 1, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France
E-mail : `laurent.bonavero@ujf-grenoble.fr`

Brendan Hassett
Department of Mathematics, Rice University, Houston, Texas 77005, USA
E-mail : `hassett@rice.edu`

Jason Michael Starr
Department of Mathematics, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794
E-mail : `jstarr@math.sunysb.edu`

Olivier Wittenberg
Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France
E-mail : `wittenberg@dma.ens.fr`

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** — 11G25, 12G05, 14C15, 14D05, 14D22, 14E05, 14E30, 14G05, 14J40, 14J45, 14M20, 14M22.

Key words and phrases. — R-equivalence, (C_i) fields, del Pezzo surfaces, rational curves, rationally connected manifolds, rationally connected varieties, semisimple algebraic groups, torsors, weak approximation, zero-cycles.

Mots-clé et phrases. — R-équivalence, approximation faible, corps (C_i), courbes rationnelles, groupes algébriques semi-simples, surfaces del Pezzo, torseurs, variétés rationnellement connexes, zéro-cycles.

VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES : ASPECTS GÉOMÉTRIQUES ET ARITHMÉTIQUES

Laurent BONAVERO, Brendan HASSETT, Jason M. STARR, Olivier WITTENBERG

Résumé. — Depuis les années 1990, les variétés rationnellement connexes jouent un rôle important dans la classification des variétés algébriques complexes. Dans les années 2000, on a commencé à étudier leurs propriétés arithmétiques. Ce volume, issu d'une rencontre « États de la recherche » (CNRS/SMF) organisée par J.-L. Colliot-Thélène, O. Debarre et A. Höring à Strasbourg en mai 2008, couvre un grand nombre des résultats obtenus dans cette direction. On y trouvera aussi de nombreuses questions ouvertes.

L'article de L. Bonavero décrit les propriétés fondamentales des variétés rationnellement connexes sur un corps algébriquement clos et offre une ouverture sur la géométrie birationnelle moderne.

L'article de O. Wittenberg s'attache aux propriétés arithmétiques des variétés rationnellement connexes, tout spécialement sur les corps locaux et sur les corps finis (méthodes de déformation et méthodes cohomologiques).

Sur les corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, une série de travaux porte sur la propriété d'approximation faible. Le rapport de B. Hassett décrit ces travaux et les techniques de déformation employées.

La notion de variété rationnellement simplement connexe admet plusieurs variantes. L'article de J. Starr étudie les fibrations en de telles variétés au-dessus d'une surface complexe. Il culmine avec une démonstration partiellement simplifiée du théorème de A. J. de Jong, J. Starr et X. He : la conjecture II de Serre sur les espaces principaux homogènes vaut sur un corps de fonctions de deux variables sur les complexes.

Abstract. — Over the last twenty years, rationally connected varieties have played an important rôle in the classification program of higher dimensional varieties. Over the last ten years a number of their arithmetic properties have been discovered. It is the ambition of this volume to report on many of these advances, as well as on a number of open questions. The volume gathers the contributions of the four speakers

of a workshop "Etats de la Recherche" (CNRS/SMF) which was organized by J.-L. Colliot-Thélène, O. Debarre and A. Höring in Strasbourg, in May 2008.

The fundamental geometric properties of rationally connected varieties are discussed in L. Bonavero's contribution, which also offers an opening on modern birational classification techniques.

O. Wittenberg surveys the arithmetic properties of rationally connected varieties, mostly over local fields and over finite fields (deformation techniques and cohomological techniques).

B. Hassett reports on the weak approximation property for families of rationally connected varieties over a complex curve.

The emerging notion of simply rationally connected variety is at the heart of J. Starr's contribution. This starts with a study of sections of families of such varieties over a complex surface. It culminates with a partly simplified proof of the theorem by de A. J. Jong, J. Starr and X. He : Serre's Conjecture II for principal homogeneous spaces holds over function fields in two variables over the complex field.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Ce sont les notes d'un mini-cours sur les variétés rationnellement connexes, écrit pour les Etats de la Recherche de la Société Mathématique de France (Strasbourg, 2008).

On met l'accent sur les aspects géométriques. Ces notes sont aussi une invitation à lire le livre d'Olivier Debarre [15], dont une grande partie de ce cours est extraite. Ces notes doivent surtout permettre au lecteur de comprendre l'énoncé suivant :

Sur un corps algébriquement clos, soient X une variété projective lisse et $\varphi : X \to C$ un morphisme surjectif sur une courbe projective lisse C. Si la fibre générale de φ est séparablement rationnellement connexe, alors φ possède une section.

Ainsi que l'un de ses fameux corollaires [20] :

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre deux variétés projectives. Si Y et la fibre générale de f sont rationnellement connexes, alors X est rationnellement connexe.

Ce cours est rédigé dans l'espoir de s'adresser à un public large, à l'exception peut-être du §7, écrit en collaboration avec Stéphane Druel, où nous donnons les détails de la preuve de la conjecture de connexité rationnelle de Shokurov par Hacon et M^cKernan, plus technique et où les prérequis sont un peu plus importants.

Nous discutons dans ces notes l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Des preuves détaillées de théorèmes de Kollár, de Kollár et Szabó et d'Esnault concernant les variétés rationnellement connexes sur les corps finis ou locaux y sont données.

Cet article de synthèse porte sur l'approximation faible pour les variétés rationnellement connexes sur les corps de fonctions de courbes complexes. On y explique comment l'approximation faible vaut aux places de bonne réduction et ce qui se passe aux fibres sans singularités excessives. On discute le cas des surfaces, des variétés de petit degré, et des hypersurfaces de Fano de discriminant sans facteur carré. On explique aussi comment la simple connexité rationnelle donne des résultats sur l'approximation faible. En appendice on résume les propriétés des espaces de modules d'applications stables qui sont utilisées dans l'étude des variétés rationnellement connexes.

Nous présentons un rapport détaillé sur un travail commun avec A. J. de Jong et Xuhua He, travail qui établit, dans le cas *déployé*, la « conjecture II » de Serre sur un corps K de fonctions de deux variables sur un corps k algébriquement clos : pour tout groupe algébrique G semisimple simplement connexe sur k, tout G-torseur sur K a un K-point. C'est une conséquence d'un théorème (en caractéristique nulle) selon lequel une variété X projective et lisse sur K possède un K-point si d'une part il n'y a pas d'*obstruction élémentaire* (comme définie par Colliot-Thélène et Sansuc) et si d'autre part certaines hypothèses géométriques sont satisfaites – les plus importantes étant que la fibre générique géométrique est rationnellement simplement connexe, et qu'elle possède une surface très tordante.

ABSTRACTS

These are lectures notes on rationally connected varieties, written for the "Etats de la Recherche" of the French Mathematical Society held in Strasbourg (May 2008). We focus on geometric aspects. These lectures notes are also an invitation to read Debarre's book [15], which was a great source of inspiration. These lectures notes should provide for the reader all the necessary material to understand the following statement :

Let X be a projective manifold defined over an algebraically closed field and let $\varphi : X \to C$ be a surjective morphism over a smooth projective curve C. If the general fiber of φ is separably rationally connected, then φ has a section.

Together with one of its famous consequences [20]:

Let $f : X \to Y$ a dominant map between two projective varieties over an algebraically closed field of characteristic zero. If both Y and the general fiber of f are rationally connected, then X is rationally connected.

These notes have been written in order that a wide audience can easily read them, except maybe the last section, written in collaboration with Stéphane Druel, a bit more technical, where we give the detailed proof of Shokurov's rational connectedness conjecture following Hacon and M^{c}Kernan.

These expository notes discuss the arithmetic of rationally connected varieties. Detailed proofs of theorems of Kollár, of Kollár and Szabó and of Esnault about rationally connected varieties over finite fields and local fields are given.

This survey addresses weak approximation for rationally connected varieties over function fields of complex curves. Topics include weak approximation at places of good reduction and the impact of mildly singular fibers; results for surfaces, varieties of low degree, and Fano hypersurfaces with square-free discriminant; and implications of rational simple connectedness for weak approximation. An appendix summarizes basic properties of moduli spaces of stable maps that are useful in the study of rationally connected varieties.

This is a survey of joint work with A. J. de Jong and Xuhua He proving Serre's "Conjecture II" for a function field K of a surface over an algebraically closed field k in the *split case*: for every simply connected, semisimple algebraic group G over k, every G-torsor over K has a K-point. This follows from a theorem, in characteristic 0, saying that a smooth, projective variety X over K has a K-point if the *elementary obstruction* of Colliot-Thélène and Sansuc vanishes, and if certain additional hypotheses hold—most importantly the geometric generic fiber must be rationally simply connected and must have a very twisting surface.

Panoramas & Synthèses
31, 2010, p. 1–8

INTRODUCTION

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Le thème commun de ce volume est l'étude des points rationnels des variétés algébriques dont la géométrie est relativement simple, c'est-à-dire qui peuvent prétendre à être des analogues, en dimension supérieure, des courbes de genre zéro, autrement dit des coniques.

Pour ces dernières, rappelons quelques propriétés :

– Toute conique sur un corps fini possède un point rationnel. Pour les corps premiers $\mathbf{F}_p$, ceci est dû à Euler (1754).

– Toute conique sur un corps de fonctions d'une variable sur le corps des complexes a un point rationnel. Ce résultat est dû à Max Noether (1870).

– (Principe de Hasse) Si une conique sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels possède des points dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$, elle possède un point dans $\mathbf{Q}$. Énoncé avec des congruences plutôt que dans le langage de Hensel, ce théorème est dû à Legendre (1785).

– (Approximation faible) Si une conique sur $\mathbf{Q}$ possède un point rationnel, alors pour tout complété de $\mathbf{Q}$ les points à coordonnées dans $\mathbf{Q}$ sont denses dans les points à coordonnées dans le complété, pour la topologie définie par ce complété. Ceci résulte immédiatement du fait qu'une conique avec un point rationnel est isomorphe à la droite projective. De façon plus générale, on peut approximer simultanément en un nombre fini de places de $\mathbf{Q}$.

De façon naïve, on peut envisager plusieurs généralisations en dimension supérieure des coniques, c'est-à-dire des courbes de genre zéro :

(a) Les variétés (géométriquement) unirationnelles, qui après extension finie du corps de base sont birationnelles à un espace projectif.

(b) Les variétés (géométriquement) rationnelles, qui après extension finie du corps de base sont dominées par une variété rationnelle.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 14M20, 14D05, 12G05.
Mots clefs. – Variétés rationnellement connexes, groupes algébriques semi-simples, torseurs.

(c) Les hypersurfaces dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^n$ sur un corps k définies par une équation homogène disons non singulière $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ de degré $d \leq n$.

Points rationnels sur quel corps de base k ? De tout temps on s'est intéressé au corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, et plus généralement aux corps de nombres. Sur de tels corps, on dispose malheureusement encore de très peu de résultats généraux. De façon un peu grossière, disons que, sur de tels corps, on a de très bons résultats pour :

(1) Les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes (cohomologie galoisienne).

(2) Les hypersurfaces $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ avec n grand par rapport à d (méthode du cercle).

Citons des problèmes étudiés pour ces types de variétés : le principe de Hasse (l'existence de solutions dans tous les complétés de k implique-t-elle l'existence de solutions dans k ?), la densité des solutions pour la topologie de Zariski, l'approximation faible (les solutions globales sont-elles denses dans les solutions locales ?).

Avant de s'attaquer aux corps de nombres, ou même aux corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, on doit déjà considérer la situation sur un corps fini, et sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos. Il y a dans cette direction des théorèmes classiques :

Théorème de Tsen (1933) : Sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ en $n+1 > d$ variables a un zéro non trivial.

Théorème de Chevalley-Warning (1935) : Sur un corps fini, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ en $n+1 > d$ variables a un zéro non trivial.

On sait aussi que les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes sur un corps fini ou sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, ont un point rationnel. Le premier énoncé est dû à Lang. Le second, en caractéristique zéro, est dû à Springer (1962). Ces deux énoncés furent généralisés par Steinberg, qui démontra (1965) la Conjecture I de Serre [**13**, 1962] : sur tout corps parfait de dimension cohomologique 1, tout espace (principal) homogène d'un groupe linéaire connexe possède un point rationnel.

Existe-t-il une classe naturelle de variétés algébriques qui sur un corps fini ont automatiquement des points rationnels ?

Existe-t-il une classe naturelle de variétés algébriques qui sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos ont automatiquement des points rationnels ?

Par exemple, dans son exposé [**15**] au congrès international d'Amsterdam en 1954, A. Weil montra (avec une méthode cohomologique uniforme) que toute surface géométriquement rationnelle sur un corps fini possède un point rationnel.

Dans un cadre purement géométrique, c'est-à-dire sur un corps de base algébriquement clos, la question : *En dimension supérieure, sur un corps de base algébriquement clos, quelles sont les généralisations des coniques, c'est-à-dire des courbes de genre* *zéro* est aussi apparue naturellement dans l'étude de la classification (birationnelle) des variétés de dimension supérieure, en dimension 2 chez l'école italienne il y a plus d'un siècle, et en dimension plus grande à partir des années 1980.

En dimension 2, toute surface unirationelle est rationnelle (Castelnuovo), et toute surface quadrique ou cubique lisse est rationnelle.

C'est au début des années 1990 qu'une réponse satisfaisante a été donnée en dimension quelconque. La bonne classe est celle des variétés rationnellement connexes, dont les propriétés principales ont été dégagées par Kollár, Miyaoka et Mori **[12]** et qui sont aussi apparues dans les travaux de F. Campana **[2]**.

Ce sont les variétés telles que deux points généraux sont reliés par une courbe de genre zéro. Cette hypothèse couvre les trois types de variétés (a), (b) et (c) envisagées naïvement. C'est clair pour (a) et (b), pour (c) on a le théorème de Campana et de Kollár, Miyaoka et Mori : les variétés de Fano sur les complexes sont rationnellement connexes.

Il y a en fait plusieurs définitions des variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes : celle donnée ci-dessus, la connexité rationnelle par chaînes (deux points sont reliés par un nombre fini de courbes de genre zéro) et la connexité rationnelle séparable, qu'on peut caractériser de façon a priori très différente : on demande l'existence d'un morphisme $\mathbf{P}^1 \to X$ tel que l'image réciproque du faisceau tangent sur X soit somme directe de $\mathcal{O}(a_i)$ *avec tous les* $a_i > 0$. Sur un corps non dénombrable de caractéristique zéro, ces trois propriétés sont équivalentes. La démonstration de ce résultat utilise les propriétés des schémas Hom, et des techniques de déformation. On renvoie ici aux lecteurs aux textes de synthèse **[1, 3, 10]**.

Il devint alors intéressant de voir ce que l'on peut dire de l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Quels énoncés connus ou conjecturés pour les surfaces (géométriquement) rationnelles valent pour toutes les variétés rationnellement connexes ?

Les premiers résultats généraux furent obtenus par Kollár, qui étudia pour ces variétés la R-équivalence sur les points rationnels de ces variétés lorsque le corps de base est local (p-adique ou réel)(1999), puis lorsque le corps de base est fini (2004). La R-équivalence est une version sur un corps k quelconque de la rationalité connexe par chaînes sur un corps algébriquement clos : c'est la relation d'équivalence sur les points k-rationnels d'une k-variété projective engendrée par la relation élémentaire : être dans l'image des points k-rationnels d'une droite $\mathbf{P}^1_k$ par un k-morphisme $\mathbf{P}^1_k \to X$.

Revenons aux deux problèmes arithmétiques posés ci-dessus. En 2003, des énoncés que l'on peut considérer comme les meilleures extensions possibles du théorème de Tsen d'une part, du théorème de Chevalley-Warning d'autre part, furent établis.

En 2003, Graber, Harris et Starr **[5]** montrèrent que *toute variété rationnellement connexe définie sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes* a un point rationnel. D'un point de vue géométrique, cela dit que toute famille à un paramètre de telles variétés admet une section. Ils montrèrent ensuite, dans un article avec B. Mazur, que la classe des variétés rationnellement connexes est la classe la plus large