PATRICK GÉRARD

# Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels

*Séminaire N. Bourbaki*, 1991-1992, exp. n$^{o}$ 757, p. 411-444.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__411_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1992
44ème année, 1991-92, n° 757

# RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES BIDIMENSIONNELS

[d' après J.-Y. CHEMIN et J.-M. DELORT]

par **Patrick GÉRARD**

L'équation d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles est l'une des plus importantes équations d'évolution non linéaires de la physique mathématique, et l'étude de ses solutions a suscité de nombreuses recherches, notamment dans les trente dernières années, parallèlement au développement de méthodes d'analyse non linéaire. Récemment, Chemin et Delort ont démontré deux résultats concernant les solutions singulières de cette équation en dimension 2 d'espace. Dans une première partie, nous rappelons le cadre mathématique et essayons de situer ces deux résultats dans l'approche générale du problème de Cauchy pour l'équation d'Euler bidimensionnelle. Dans la seconde partie, nous donnons une démonstration de deux résultats classiques importants, dûs respectivement à Wolibner et à Yudovitch, puis nous présentons plus en détail les travaux de Chemin et Delort.

Je remercie J.–B. Bost, J.–Y. Chemin, J.–M. Delort et X. Saint–Raymond pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la préparation de cet exposé.

## 0.1. Préliminaires

Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte connexe orientée de dimension $d$.[1] Les notations suivantes de géométrie différentielle seront utilisées au cours de cet exposé :

[1] *La plupart des résultats discutés ici ont été obtenus dans l'espace* $\mathbf{R}^d$ *plutôt que sur une variété compacte. Nous avons préféré ce cadre car il évite une discussion délicate des conditions à l'infini, et permet de mieux montrer les aspects invariants des techniques utilisées.*

Si $X$ est un champ de vecteurs sur $M$, on désigne par $L_X$ la dérivée de Lie suivant $X$, et par $\nabla_X$ la dérivée covariante suivant $X$. On désigne par $\tau$ la forme volume positive sur $M$. La divergence du champ $X$ est la fonction $\mathrm{div}X$ définie par

$$L_X\tau = (\mathrm{div}X)\tau.$$

La norme de $X$ sera notée $|X| = g(X,X)^{1/2}$. La dérivée covariante induit un opérateur différentiel d'ordre 1 $\nabla$ des champs de vecteurs dans les sections du fibré $\mathrm{End}(TM)$, ou champs de tenseurs. On a alors $\mathrm{div}X = \mathrm{tr}(\nabla X)$.

On note $u \mapsto \tilde{u}$ l'isomorphisme de $TM$ dans $T^*M$ induit par la métrique $g$. Le gradient $\nabla f$ d'une fonction $f$ est le champ de vecteurs correspondant à $df$ par cet isomorphisme, et le laplacien de $f$ est défini par $\Delta f = \mathrm{div}\nabla f$. La divergence d'un champ de tenseurs $T$ est le champ de vecteurs $\mathrm{div}T$ correspondant à $-{}^t\nabla T$ par cet isomorphisme, ${}^t\nabla$ désignant l'opérateur différentiel transposé de $\nabla$ pour la densité $\tau$. Si $u$ est un champ de vecteurs à divergence nulle, on a $\mathrm{div}(u \otimes \tilde{u}) = \nabla_u u$.

Enfin, on désigne par $*$ l'opérateur de Hodge sur les formes.

Lorsque $M$ est de dimension 2, on appelle $J$ l'opérateur sur les champs de vecteurs défini par

$$(JX)\tilde{} = *\tilde{X}.$$

On a $J^2 = -1$. Le rotationnel d'un champ de vecteurs $X$ est la fonction $\mathrm{rot}X$ définie par $d\tilde{X} = (\mathrm{rot}X)\tau$. On a aussi $\mathrm{rot}u = -\mathrm{tr}(J\nabla X)$. Enfin, si $u$ est un champ de vecteurs à divergence nulle, on a $\mathrm{rot}\nabla_u u = L_u \mathrm{rot}u$.

## 0.2. L'équation d'Euler.

En 1755, pour décrire le mouvement d'un fluide parfait incompressible occupant $M$, Euler [E] introduit le système d'équations suivant. Si l'on désigne par $u(t,x)$ la vitesse à l'instant $t \in \mathbf{R}$ de la particule de fluide occupant la position $x \in M$, le principe fondamental de la dynamique et la condition d'incompressibilité s'écrivent successivement

$$(E_1) \qquad \partial_t u + \nabla_u u = -\nabla p,$$

$$(E_2) \qquad \mathrm{div}u = 0,$$

où $p$ désigne le champ scalaire de pression. Dans la suite, nous désignerons par $(E)$ le système ci–dessus. Notons que le gradient de pression n'est pas une donnée du problème, mais une inconnue supplémentaire, que l'on élimine en prenant la divergence de l'équation $(E_1)$,

$$-\Delta p = \operatorname{div} \nabla_u u,$$

ce qui détermine $\nabla p$ en fonction du champ de vecteurs $u$.

On peut également voir $(E)$ comme l'équation des géodésiques sur le groupe de Lie de dimension infinie des difféomorphismes de $M$ préservant le volume, muni de la métrique définie par l'énergie cinétique

$$E_c = \int_M |u(t,x)|^2 \tau(x).$$

Dans ce cadre, $p$ s'interprète comme un multiplicateur de Lagrange. Nous ne développerons pas ici ce point de vue et renvoyons à Arnold [Ar], Ebin–Marsden [EB], Shnirelman [Sh] et Brenier [Br] pour une étude détaillée. Retenons seulement de cette interprétation que, si $u$ est solution de $(E)$, l'énergie cinétique est constante au cours du temps—ce que l'on peut d'ailleurs aisément retrouver en prenant le produit scalaire $L^2$ des deux membres de $(E_1)$ par $u$ et en utilisant $(E_2)$.

Un problème fondamental en mécanique des fluides est bien sûr le problème de Cauchy associé à $(E)$, c'est-à-dire la détermination de $u$ vérifiant $(E)$ et la condition $u(0,x) = u^0(x)$, $u^0$ étant un champ de vecteurs donné sur $M$ à divergence nulle. L'unicité et l'existence sur un petit intervalle de temps semblent avoir été démontrées pour la première fois par Lichtenstein [Li] en 1925. L'existence globale d'une telle solution est toujours un problème ouvert en dimension 3, mais a été démontrée en dimension 2 par Wolibner [W] en 1933 (*cf.* aussi Kato [Ka]). Néanmoins le résultat de Wolibner nous renseigne peu sur les propriétés qualitatives de la solution qu'il met en évidence ; les estimations obtenues laisseraient même présager un comportement très chaotique des lignes de courant lorsque $t$ devient grand (*cf.* §1).

Pour obtenir des renseignements sur les propriétés qualitatives des solutions d'un tel problème, une approche couramment employée est d'essayer de résoudre le même problème avec des données singulières et de décrire comment évoluent les singularités. Ces solutions singulières (par exemple, un champ de vitesses discontinu) sont en général des modèles "limites" de phénomènes physiques mettant en présence des échelles de grandeur très différentes (par exemple, l'évolution d'une interface). Les deux résultats qui font l'objet de cet exposé se rattachent directement à cette problématique pour un fluide bidimensionnel. Avant de les présenter, il nous faut introduire une quantité fondamentale en mécanique des fluides : le tourbillon.

### 0.3. Le tourbillon.

Dans toute la suite de l'exposé, la variété $M$ est supposée de dimension 2. On définit le tourbillon $\omega$ associé au champ de vitesses $u$ par la formule

$$\omega = \mathrm{rot} u.$$

Notons que $\int_M \omega(x)\tau(x) = 0$. Outre son interprétation physique évidente, l'intérêt de cette notion est qu'elle permet une formulation équivalente de $(E)$, de la façon suivante. En appliquant l'opérateur rot à $(E_1)$, on obtient l'équation de transport

$$(T) \qquad \partial_t \omega + L_u \omega = 0,$$

traduisant que $\omega$ est une fonction constante le long des lignes de courant. Par ailleurs, on peut—presque— retrouver $u$ à partir de $\omega$. Pour cela, on utilise le fait que le laplacien est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions $C^\infty$ de moyenne nulle (*cf.* par exemple [R]); désignons par $\Delta^{-1}$ son inverse. Soit d'autre part $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel de dimension finie des champs de vecteurs harmoniques sur $M$, et soit $H$ le projecteur orthogonal de l'espace des champs de vecteurs sur $M$ à valeurs dans $\mathcal{H}$, pour le produit scalaire $L^2$ associé à $\tau$. En tenant compte de $(E_2)$, la décomposition de Hodge–de Rham [R] du champ $u$ donne la "relation de Biot et Savart"

$$(B) \qquad u = B\omega + h,$$

où $B = J\nabla\Delta^{-1}$ est la restriction aux fonctions de moyenne nulle d'un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-1$, et $h = H(u)$. Enfin, l'évolution de $h$ dans l'espace $\mathcal{H}$ est obtenue en appliquant $H$ à l'équation $(E_1)$,

$$(H) \qquad \partial_t h + Q(u, u) = 0,$$

où l'on a posé

$$Q(v, w) = -\sum_j \Big(\int_M g(\nabla_v X_j, w)\tau\Big) X_j,$$