JEAN-LOUIS CATHELINEAU

Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes

Séminaire N. Bourbaki, 1992-1993, exp. n° 772, p. 311-341.
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__311_0>

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 772

Juin 1993

HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET POLYLOGARITHMES
[d'après A.B. Goncharov et d'autres]

par **Jean-Louis CATHELINEAU**

1 INTRODUCTION

Ce rapport, qui prolonge l'exposé 762 de J. Oesterlé au séminaire Bourbaki de novembre 1992 sur les polylogarithmes, a pour but d'introduire au travail de Goncharov sur la conjecture de Zagier. Avant de rappeler cette conjecture précisons quelques notations; si F est un corps de nombres, on note r_1 (resp. $2r_2$) le nombre de plongements réels (resp. non réels) de F dans $\mathbf{C}$; d est le degré de F et Δ_F son discriminant; on pose pour $n \geq 2$, $d_n = r_1 + r_2$, si n est impair et $d_n = r_2$, si n est pair. On a la

Conjecture de Zagier [59,60] *Soit F un corps de nombres et ζ_F la fonction zêta de F, pour $n \geq 2$*

$$\zeta_F(n) = q_n R_n \frac{\pi^{n(d-d_n)}}{|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

où q_n est un rationnel non nul et R_n est une somme de produits de valeurs de la fonction n-logarithme de Bloch-Wigner généralisée prises en des éléments de F et de leurs conjugués.

Théorème 1 *La conjecture de Zagier est vraie pour n égal à 2 et 3.*

Zagier a prouvé le cas $n = 2$ à partir de calculs de volumes de variétés hyperboliques de dimension trois [59], mais cette approche ne semble pas se prolonger à $n \geq 3$. Un autre point de vue, dont l'origine remonte à un travail de Bloch [6], consiste à ramener la conjecture à un théorème profond de A. Borel. Ce dernier a construit pour tout corps de nombres une application, le *régulateur de Borel*

$$r_{Bor} : K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbf{R}^{d_n},$$

où $K_{2n-1}(F)$ est un groupe de K-théorie algébrique du corps F. Le résultat suivant peut être vu comme une généralisation à $n \geq 2$ d'un classique théorème de Dirichlet

Théorème 2 (Borel [9]) *Pour $n \geq 2$ le régulateur de Borel induit un isomorphisme de $K_{2n-1}(F)/\mathrm{tors}$ sur un réseau de $\mathbf{R}^{d_n}$ dont le covolume est égal, à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$ près, à*

$$\frac{\zeta_F(n)|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{n(d-d_n)}}.$$

Le problème fondamental est alors d'exprimer le régulateur de Borel à l'aide des polylogarithmes. Pour $n = 2$, on peut retrouver ainsi la conjecture de Zagier, comme conséquence de travaux de Bloch, Suslin et Dupont [6,53, 16,30]. Le travail de Goncharov concerne le cas $n = 3$. Pour $n = 2$, le dilogarithme apparaît assez naturellement dans des calculs de volumes, mais l'intervention du trilogarithme dans le cas $n = 3$ reste encore assez mystérieuse et la méthode de Goncharov ne se généralise pas immédiatement à $n \geq 4$.

L'intérêt du travail de Goncharov ne réside pas seulement dans le résultat obtenu sur la conjecture de Zagier, mais aussi dans les méthodes et les outils utilisés. Citons le problème des identités fonctionnelles pour les n-logarithmes, des questions abstraites touchant à l'homologie du groupe linéaire et à la K-théorie algébrique des corps, mais aussi des aspects élémentaires de géométrie projective, réminiscents du troisième problème de Hilbert en géométrie hyperbolique [12,19]. En particulier, un rôle crucial est joué par un invariant des configurations de 6 points du plan projectif introduit par Goncharov, le trirapport, qui généralise le classique birapport.

On peut schématiser l'approche de Goncharov par le tableau suivant qui renvoie à divers points abordés dans ces pages

$$\begin{tikzcd}
\text{K-théorie} \arrow[r, "\text{Régulateurs}"] \arrow[d, "\text{Grassmanniennes}"'] & \begin{array}{c}\text{Cohomologie}\\ \text{de Deligne}\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Groupes}\\ \text{de configurations}\\ \text{géométriques}\end{array} \arrow[r, "\begin{array}{c}\text{Invariants}\\ \text{projectifs}\end{array}"'] & \begin{array}{c}\text{Groupes}\\ \text{polylogarithmiques}\end{array} \arrow[u, "\text{Polylogarithmes}"']
\end{tikzcd}$$

A part une courte annonce au B.A.M.S. parue en 1991, les travaux de Goncharov n'existent encore qu'à l'état de preprints, principalement deux longs articles [26,27] ayant un caractère prospectif assez marqué. Je me suis surtout inspiré dans ce qui suit du dernier qui doit paraître aux proceedings de la conférence de Seattle de 1991 sur les motifs. Je n'ai pas abordé les aspects motiviques de la conjecture de Zagier [2,3,15]; cela mériterait un autre exposé.

J'ai aussi évoqué l'intéressant travail de Yang [58] qui prouve une variante de la conjecture de Zagier pour $n = 3$, où le trilogarithme de Bloch-Wigner est remplacé par celui de Hain-MacPherson. Il est probable qu'en poussant un peu les résultats de Yang le trirapport apparaisse et que l'on retrouve exactement la conjecture de Zagier sous la forme énoncée ci-dessus.

Notations. F sera toujours un corps infini. Si A est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, on pose $A(n) = (2i\pi)^n A$. Si M est un $\mathbf{Z}$-module, on note $M_{\mathbf{Q}}$ le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

2 K-THÉORIE DES CORPS

2.1 Homologie du groupe linéaire général et K-théorie

Rappelons que le groupe linéaire général $GL(F)$ d'un corps F est la limite inductive du système

$$GL(m, F) \longrightarrow GL(m+1, F)$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$ l'homologie du groupe discret $GL(F)$ à coefficients dans le $GL(F)$-module trivial $\mathbf{Q}$; c'est aussi l'homologie singulière de l'espace classifiant $BGL(F)$ du groupe $GL(F)$. Il est classique [39] que $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$ a une structure d'algèbre de Hopf commutative et cocommutative, dont le produit provient de l'opération de somme directe sur les matrices et le coproduit de la diagonale $BGL(F) \to BGL(F) \times BGL(F)$, et que comme telle c'est une algèbre graduée commutative libre engendrée par l'espace de ses éléments primitifs $Prim\, H_*(GL(F), \mathbf{Q})$. On définit alors les groupes de K-théorie rationnelle de F par

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} := Prim\, H_n(GL(F), \mathbf{Q}),\ n \geq 1.$$

Par un théorème de Milnor-Moore [42], on sait que ces groupes coïncident rationnellement avec les groupes de K-théorie algébrique $K_n(F)$ définis par

Quillen, i.e. $K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n(F) \otimes \mathbf{Q}$, où $K_n(F) := \pi_n(BGL(F)^+)$ est le n-ième groupe d'homotopie de l'espace $BGL(F)^+$ obtenu à partir de $BGL(F)$. par la construction + de Quillen [39] .

2.2 Filtrations sur la K-théorie

On dispose sur chaque $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$ de deux filtrations.

La γ-filtration provient d'opérations du type d'Adams ψ^k [33,37,49], induites par les puissances extérieures des matrices sur $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$. C'est une filtration décroissante

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n^{1)}(F) \supset K_n^{2)}(F) \supset \dots \supset K_n^{i)}(F) \supset \dots$$

Par un théorème de Soulé [49], $K_n^{n+1)}(F) = 0$. Le gradué associé s'identifie alors canoniquement à la décomposition d' Adams de $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = \bigoplus_{i=0}^{n} K_n^{(i)}(F),$$

où $K_n^{(i)}(F)$ est le sous-espace propre de $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$ de valeur propre k^i pour l'opération d'Adams ψ^k ($k \geq 2$). On a $K_n^{(1)}(F) = 0$ pour $n \geq 2$ et Beilinson et Soulé [1,49] ont conjecturé que $K_n^{(i)}(F) = 0$ pour $i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

La filtration par le rang est la filtration croissante

$$\{0\} = K_n^{[0}(F) \subset K_n^{[1}(F) \subset \dots \subset K_n^{[i}(F) \subset \dots$$

obtenue en posant pour $i \geq 1$

$$K_n^{[i}(F) = Im\{H_n(GL(i,F), \mathbf{Q}) \to H_n(GL(F), \mathbf{Q})\} \cap K_n(F)_{\mathbf{Q}}.$$

Par un théorème de stabilité de Suslin [51], les applications $H_n(GL(N,F), \mathbf{Q}) \to H_n(GL(F), \mathbf{Q})$ sont des isomorphismes pour $N \geq n$, par suite $K_n^{[n}(F) = K_n(F)_{\mathbf{Q}}$. On pose

$$K_n^{[i]}(F) = K_n^{[i}(F)/K_n^{[i-1}(F).$$

2.3 Conjecture du rang

Suslin a conjecturé que la γ-filtration et la filtration par le rang sont opposées, c'est à dire que pour tout i

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n^{[i}(F) \bigoplus K_n^{i+1)}(F),$$

ou encore que pour tout i la composée

$$K_n^{[i}(F) \longrightarrow K_n(F) \longrightarrow K_n^{(i)}(F),$$