

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JOSEPH OESTERLÉ

Polylogarithmes

Séminaire N. Bourbaki, 1992-1993, exp. n° 762, p. 49-67.

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__49_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__49_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POLYLOGARITHMES

par Joseph OESTERLÉ

Les polylogarithmes sont les fonctions holomorphes multivaluées Li_k que l'on obtient par prolongement analytique des séries entières $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^k$. Défini par Leibnitz en 1696, le dilogarithme Li_2 est étudié en détail par Euler en 1768. La première étude du trilogarithme est due à Landen (1780), et celle des polylogarithmes d'ordre supérieur commence vraiment avec les travaux de Kummer en 1840. Jusque vers 1975, les polylogarithmes sont essentiellement considérés sous leur aspect "fonctions spéciales" (recherche d'équations fonctionnelles, valeurs remarquables, calcul de séries et d'intégrales dans lesquelles ils interviennent, etc.). On dispose pour cette période d'une bibliographie à peu près exhaustive dans le livre de Lewin, *Polylogarithms and associated functions* ([Le]) ; elle inclut la liste publiée par Nielsen en 1909 des travaux antérieurs au 20ème siècle.

Dans les quinze dernières années, la théorie des polylogarithmes a véritablement explosé. Voici quelques-uns des domaines dans lesquels ils sont apparus :

- volumes de polytopes en géométrie sphérique et hyperbolique
- volumes des variétés hyperboliques de dimension 3
- description combinatoire de classes caractéristiques
- valeurs spéciales des fonctions zêta
- géométrie des configurations de points dans $\mathbf{P}_1$
- cohomologie de $GL_n(\mathbf{C})$
- calcul de fonctions de Green
- intégrales itérées de Chen
- régulateurs en K -théorie algébrique
- équations différentielles à monodromie nilpotente
- problème de Hilbert sur les polyèdres équidécomposables
- complétion nilpotente de $\pi_1(\mathbf{P}_1 - \{0, 1, \infty\})$

- variation de structures de Hodge mixtes
- cohomologie motivique.

La plupart de ces aspects sont abordés dans le rapport récent de Hain sur les polylogarithmes ([Ha]) et dans le livre édité en 1991 par Lewin, intitulé *Structural Properties of Polylogarithms* ([POL]). On trouve à la fin de ce livre une bibliographie très complète des articles récents concernant les polylogarithmes ; il m'a paru superflu de la recopier exhaustivement ici.

Cet exposé n'a pas pour but de dresser un panorama de la théorie sous tous ces aspects, mais seulement de fournir au non-spécialiste une introduction élémentaire aux polylogarithmes. Il est souhaitable que d'autres exposés prennent la relève pour présenter les avancées des recherches dans les divers domaines que nous avons mentionnés.

1. DÉTERMINATION PRINCIPALE DES POLYLOGARITHMES

1.1. Définition

Soit k un entier ≥ 1 . La *détermination principale du k -logarithme* est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - [1, +\infty[$. Pour $|z| < 1$, elle est donnée par la formule

$$(1) \quad Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}.$$

L'existence du prolongement holomorphe à $\mathbf{C} - [1, +\infty[$ résulte par récurrence des relations

$$(2) \quad Li_1(z) = -\log(1 - z)$$

$$(3) \quad Li'_k(z) = \frac{1}{z} Li_{k-1}(z) \quad (k \geq 2)$$

(où $\log$ est la détermination principale du logarithme).

1.2. Relations de distribution

Pour k et r entiers ≥ 1 , on a, d'après (1)

$$(4_r) \quad Li_k(z^r) = r^{k-1} \sum_{\omega^r=1} Li_k(\omega z) \quad (|z| < 1).$$

1.3. Relation d'inversion

Pour tout $k \geq 1$ et tout $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty[$, on a

$$(5) \quad Li_k(z) + (-1)^k Li_k(z^{-1}) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right),$$

où B_k est le polynôme de Bernoulli de degré k et $\log z$ le logarithme de z dont la partie imaginaire appartient à $]0, 2\pi[$. Cela se déduit de (2) et (3) par récurrence sur k en remarquant que la dérivée de B_k est $k B_{k-1}$, que la valeur moyenne de B_k sur $[0, 1]$ est nulle et que, sur le cercle unité privé du point 1, la fonction Li_k est donnée par la formule (1) et a pour valeur moyenne 0.

La relation d'inversion (5) permet de comparer les valeurs de Li_k des deux côtés de la coupure $[1, +\infty[$: on déduit de la relation $B_k(t+1) - B_k(t) = k t^{k-1}$ que l'on a, pour tout nombre réel $x > 1$,

$$(6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (Li_k(x + i\varepsilon) - Li_k(x - i\varepsilon)) = 2\pi i \log^{k-1} x / (k-1)!.$$

La relation (5) fournit aussi un développement asymptotique de Li_k à l'infini. On a en particulier

$$(7) \quad |Li_k(z)| = O(\log^k |z|) \quad (|z| \rightarrow +\infty).$$

1.4. Limite en 1

Supposons $k \geq 2$. Lorsque $z \in \mathbf{C} - [1, +\infty[$ tend vers 1, $Li_k(z)$ a une limite : on le déduit de (1) pour $|z| \leq 1$, puis de la relation d'inversion pour $|z| \geq 1$. Cette limite, d'après (1), est $\zeta(k)$, où ζ est la fonction zêta de Riemann. Par passage à la limite dans (5), on retrouve, pour k pair, la formule classique $2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} b_k$, où $b_k = B_k(0)$ est le nombre de Bernoulli d'indice k .

2. MONODROMIE DES POLYLOGARITHMES

Dans ce paragraphe, (X, x_0) désigne le revêtement universel de l'espace pointé $(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \frac{1}{2})$ et $p : X \rightarrow \mathbf{C} - \{0, 1\}$ l'application canonique : les éléments de X sont les classes d'homotopie $[c]$ des chemins c d'origine $\frac{1}{2}$ dans $\mathbf{C} - \{0, 1\}$, et l'on

a $p([c]) = c(1)$. Le groupe fondamental $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \frac{1}{2})$ opère à gauche sur X : si $g \in G$ est la classe d'un lacet ℓ , $g[c]$ est la classe du chemin composé ℓc .

2.1. Les polylogarithmes, fonctions multivaluées sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$

Pour chaque entier $k \geq 1$, il existe une fonction holomorphe $\mathbf{Li}_k$ sur X dont le germe en x_0 est celui de $Li_k \circ p$: cela résulte par récurrence des relations (2) et (3). On interprète cela en disant que le k -logarithme est “une fonction holomorphe multivaluée sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ ”. Si A est une partie de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$, toute fonction sur A de la forme $\mathbf{Li}_k \circ s$, où s est une section continue de p sur A , s'appelle une *détermination du k -logarithme sur A* et, lorsque cela ne prête pas à confusion, se note simplement Li_k .

Il est commode, si c est un chemin dans $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ d'origine $\frac{1}{2}$ et d'extrémité z , de noter $Li_k^{[c]}(z)$ le nombre complexe $\mathbf{Li}_k([c])$, et de dire que c'est la *détermination du k -logarithme au point z relative au chemin c* .

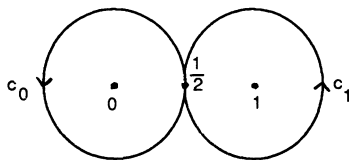
On utilise des conventions analogues en ce qui concerne la fonction logarithme.

Remarques.- 1) Pour simplifier, nous avons choisi de privilégier le point-base $\frac{1}{2}$. On peut être plus intrinsèque en faisant jouer le rôle de point-base de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ à l'ensemble contractile $]0, 1[$, ou au vecteur tangent $\frac{d}{dz}$ à l'origine.

2) L'intégrale itérée $\int_{\gamma} (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ le long d'un chemin γ de classe C^1 dans une variété différentielle d'une suite $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ de formes différentielles de degré 1 est par définition $\int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1} f_1(t_1) \cdots f_k(t_k) dt_1 \cdots dt_k$, où $\gamma^* \omega_j = f_j(t) dt$. Les polylogarithmes sont de telles intégrales (généralisées) : si γ est un chemin dans $\mathbf{C}$ reliant 0 à z sans repasser par 0 ni passer par 1, $\int_{\gamma} \left(\frac{du}{1-u}, \frac{du}{u}, \dots, \frac{du}{u} \right)$ est une détermination de $Li_k(z)$.

2.2. Relations de monodromie

Considérons les lacets c_0, c_1 représentés ci-dessous



Leurs classes engendrent le groupe libre $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0, 1\}, \frac{1}{2})$.