JOSEPH OESTERLÉ

Dessins d'enfants

Séminaire N. Bourbaki, 2001-2002, exp. n^{o} 907, p. 285-305.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__285_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2002
54^{e} année, 2001-2002, n^{o} 907, p. 285 à 305

DESSINS D'ENFANTS

par **Joseph OESTERLÉ**

> Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient certainement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. À un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus.
>
> Alexander GROTHENDIECK, *Esquisse d'un programme,* 1984.

En 1984, Alexander Grothendieck présente un programme de recherche, intitulé *Esquisse d'un programme* ([9]), pour demander son détachement au CNRS (qu'il obtiendra, et conservera jusqu'à son départ en retraite en 1988). Grothendieck y utilise le terme de dessin d'enfant (dans son sens courant) comme un analogue imagé de certaines cartes cellulaires ; il explique que « toute carte orientée finie se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe », et que « le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$ opère sur la catégorie de ces cartes de façon naturelle » : cela se déduit de la comparaison de différents points de vue sur les revêtements de $\mathbf{P}_1 - \{0, 1, \infty\}$. Depuis, le terme de dessin d'enfant a été souvent repris, avec un sens mathématique variable suivant les auteurs, pour désigner les objets (ou classes d'isomorphisme d'objets) intervenant dans l'un ou l'autre de ces points de vue. Nous ne chercherons pas à le définir ici, et nous nous contenterons de l'utiliser pour désigner l'ensemble de la théorie.

Voici quelques raisons qui plaident pour porter une attention particulière aux revêtements finis de la courbe $\mathbf{P}_1 - \{0, 1, \infty\}$:

a) C'est la courbe algébrique la plus simple dont le groupe fondamental n'est pas commutatif.

b) Elle a beaucoup de revêtements sur $\overline{\mathbf{Q}}$: d'après un théorème de Belyĭ, toute courbe algébrique intègre sur $\overline{\mathbf{Q}}$ possède un ouvert de Zariski non vide qui se réalise comme un tel revêtement.

c) Elle s'identifie à l'espace des modules $M_{0,4}$ des courbes de genre 0 munies de 4 points marqués. L'étude de l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur son π_1 est le point de départ de l'étude de la tour de Grothendieck-Teichmüller (formée des groupoïdes fondamentaux de tous les espaces de modules $M_{g,n}$, sur lesquels opère $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$).

Notations

a) Si K est un corps, $\mathbf{P}_{\mathrm{K}}$ désigne la droite projective, considérée comme une courbe algébrique sur K, et $\mathbf{P}(\mathrm{K}) = \mathrm{K} \cup \{\infty\}$ l'ensemble de ses points rationnels ; on note $\mathbf{P}'_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{P}'(\mathrm{K})$ les complémentaires de $\{0, 1, \infty\}$ dans $\mathbf{P}_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{P}(\mathrm{K})$.

b) On note $\overline{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des nombres complexes qui sont algébriques sur $\mathbf{Q}$. C'est une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$. On note $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ son groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$; c'est un groupe profini.

1. REVÊTEMENTS FINIS DE $\mathbf{P}_1 - \{0, 1, \infty\}$

1.1. Le point de vue topologique et le point de vue algébrique complexe

Les revêtements finis de la droite projective complexe privée de 0, 1, ∞ peuvent être considérés de deux points de vue :

— *le point de vue topologique* : ce sont les revêtements finis de l'espace topologique $\mathbf{P}'(\mathbf{C}) = \mathbf{C} - \{0, 1\}$;

— *le point de vue algébrique* : ce sont les revêtements étales de la courbe algébrique complexe $\mathbf{P}'_{\mathbf{C}}$.

Ces deux points de vue sont équivalents. En effet, d'après un théorème de Grothendieck (*cf.* [13], XII, th. 5.1), pour tout schéma S de type fini sur $\mathbf{C}$, le foncteur « passage aux points complexes » est une équivalence de la catégorie des revêtements étales de S sur celle des revêtements (topologiques) finis de $\mathrm{S}(\mathbf{C})$. Dans le cas particulier qui nous intéresse, celui où $\mathrm{S} = \mathbf{P}'$, on peut bien sûr déduire directement ce résultat du théorème d'existence de Riemann.

Remarque. — L'anneau des fonctions régulières de $\mathbf{P}'_{\mathbf{C}}$ est $\mathbf{C}[z, z^{-1}, (1-z)^{-1}]$ (où z est une indéterminée). Tout revêtement étale de $\mathbf{P}'_{\mathbf{C}}$ est affine. Le foncteur « algèbre des fonctions régulières » est une équivalence de la catégorie des revêtements étales de $\mathbf{P}'_{\mathbf{C}}$ sur la catégorie opposée à celle des algèbres étales et finies sur $\mathbf{C}[z, z^{-1}, (1-z)^{-1}]$.

1.2. Le point de vue des revêtements ramifiés

Un *revêtement ramifié fini* d'une surface topologique compacte S est par définition un couple (X, p), où X est une surface topologique compacte et $p : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ une application continue, dont le germe en chaque point $x \in \mathrm{X}$ est isomorphe à celui de $z \mapsto z^{e(x)}$ au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, pour un entier $e(x) \geqslant 1$. L'entier $e(x)$ s'appelle *l'indice de ramification* de p en x ; s'il est égal à 1, on dit que p est *non ramifié* en x. Tout revêtement fini du complémentaire d'une partie finie de S se prolonge de manière unique (à isomorphisme unique près) en un revêtement ramifié fini de S.

Le foncteur de restriction est donc une équivalence de la catégorie des revêtements ramifiés finis de $\mathbf{P}(\mathbf{C})$, non ramifiés au-dessus de $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$, dans celle des revêtements finis de $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$.

On a des résultats analogues dans la situation algébrique : les revêtements ramifiés considérés dans ce cas sont les couples (X, p), où X est une courbe algébrique projective et lisse sur $\mathbf{C}$ et $p : \mathrm{X} \to \mathbf{P}_{\mathbf{C}}$ un morphisme fini, étale au-dessus de $\mathbf{P}'_{\mathbf{C}}$.

> *Remarque.* — Le corps des fonctions rationnelles de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}$ est $\mathbf{C}(z)$. Le foncteur « algèbre des fonctions rationnelles » est une équivalence de la catégorie des revêtements ramifiés de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}$, étales au-dessus de $\mathbf{P}'_{\mathbf{C}}$, sur la catégorie opposée à celle des algèbres réduites de dimension finie sur $\mathbf{C}(z)$, non ramifiées en dehors de $0, 1, \infty$.

Le foncteur « passage aux points complexes » permet de passer, pour les revêtements ramifiés, du cadre algébrique au cadre topologique. Les fibres en 0, 1 et ∞ des revêtements ramifiés considérés dans les deux cadres s'identifient canoniquement ; les notions d'indices de ramification définies dans les deux cadres coïncident.

1.3. Le point de vue des groupes fondamentaux (cas topologique)

Rappelons la définition du groupoïde fondamental $\varpi_1(\mathrm{S})$ d'un espace topologique S : ses points sont ceux de S ; les flèches reliant un point a à un point b sont les classes d'homotopie strictes de chemins reliant a à b ; l'ensemble de ces flèches est noté $\pi_1(\mathrm{S}; a, b)$, ou $\pi_1(\mathrm{S}, a)$ si $a = b$. La composée de deux flèches $\gamma \in \pi_1(\mathrm{S}; a, b)$ et $\gamma' \in \pi_1(\mathrm{S}; b, c)$ sera notée $\gamma'\gamma$ (contrairement à l'usage en topologie où on l'écrit plutôt $\gamma\gamma'$).

Soit (Y, q) un revêtement de S. La famille $(q^{-1}(a))_{a\in \mathrm{S}}$ des fibres de q est un $\varpi_1(\mathrm{S})$-ensemble : chaque élément de $\pi_1(\mathrm{S}; a, b)$ définit, par relèvement des chemins, une bijection de $q^{-1}(a)$ sur $q^{-1}(b)$. Supposons que S soit localement contractile (ou plus généralement que chaque point $a \in \mathrm{S}$ possède un voisinage U connexe par arcs tel que l'homomorphisme $\pi_1(\mathrm{U}, a) \to \pi_1(\mathrm{S}, a)$ soit nul). Le foncteur $(\mathrm{Y}, q) \mapsto (q^{-1}(a))_{a\in \mathrm{S}}$ est alors une équivalence de la catégorie des revêtements de S dans celle des $\varpi_1(\mathrm{S})$-ensembles ; les revêtements finis correspondent aux $\varpi_1(\mathrm{S})$-ensembles $(\mathrm{E}_a)_{a\in \mathrm{S}}$ formés d'ensembles finis.

On peut remplacer dans ce qui précède le groupoïde fondamental par un sous-groupoïde plein, contenant au moins un point dans chaque composante connexe par arcs de S. En particulier, si S est connexe par arcs et $a \in \mathrm{S}$, le foncteur « fibre en a »

est une équivalence de la catégorie des revêtements finis de S sur celle des $\pi_1(\mathrm{S}; a)$-ensembles finis.

Ceci s'applique en particulier au cas où $\mathrm{S} = \mathbf{P}'(\mathbf{C})$: pour tout $a \in \mathbf{P}'(\mathbf{C})$, le foncteur « fibre en a » est une équivalence de la catégorie des revêtements finis de $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$ sur celle des $\pi_1(\mathbf{P}'(\mathbf{C}), a)$-ensembles finis.

Remarques. — 1) On peut faire jouer le rôle de point-base à un sous-ensemble contractile de $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$. Prenons par exemple l'intervalle $]0,1[$ et notons π le groupe fondamental correspondant ; il possède deux générateurs canoniques c_0 et c_1 (correspondant à un tour effectué dans le sens trigonométrique autour de 0 et 1 respectivement) ; le π-ensemble associé à (Y, q) s'identifie dans ce cas à l'ensemble des composantes connexes de $q^{-1}(]0,1[)$.

2) On peut également faire jouer le rôle de point-base à un germe d'ensemble contractile (par exemple le germe en 0 de l'intervalle $]0,1[$) ; le rôle de la fibre est alors tenu par l'ensemble des relèvements continus de ce germe.

3) Le groupe des permutations de $\{0,1,\infty\}$ opère sur $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$. Plutôt que de choisir un seul point-base, il est parfois plus commode d'en prendre un nombre fini, stable par ce groupe de symétrie. Dans *Esquisse d'un programme*, Grothendieck propose le choix suivant : on interprète $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$ comme l'espace de modules $M_{0,4}(\mathbf{C})$ paramétrant les classes d'isomorphisme de courbes de genre 0 (projectives, lisses, irréductibles sur $\mathbf{C}$) munies (d'une suite ordonnée) de 4 points marqués (deux à deux distincts) : un point $a \in \mathbf{P}'(\mathbf{C})$ correspond à la classe d'isomorphisme de la droite projective, munie de $(0,1,\infty,a)$.

Considérons une courbe de genre 0 munie de 4 points marqués ; en général, le groupe des automorphismes de la courbe qui stabilisent l'ensemble des points marqués est d'ordre 4 (et isomorphe au groupe de Klein). Il n'est plus grand que lorsque la classe d'isomorphisme de la courbe, munie de ses points marqués, correspond à l'un des points -1, $\frac{1}{2}$, 2, ρ, $\overline{\rho}$ de $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$ (avec $\rho = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$). Grothendieck propose de prendre ces 5 points de $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$ comme points-base.

Les classes d'isomorphisme des courbes de genre 0 munies de 4 points marqués, et qui possèdent une structure réelle pour laquelle l'ensemble des points marqués est stable par conjugaison complexe, correspondent dans $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$ à la réunion des deux droites et des deux cercles représentés sur la figure 1 ci-dessous. En ne conservant que les portions de ces courbes reliant les points-base choisis, on obtient 6 chemins reliant respectivement chacun des trois points -1, $\frac{1}{2}$, 2 à chacun des deux points ρ, $\overline{\rho}$. Le sous-groupoïde plein du groupoïde fondamental $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$ bâti sur ces 5 points-base est le groupoïde libre engendré par les classes de ces six chemins.

Cette construction qui peut sembler pédante dans le cas de $\mathbf{P}'(\mathbf{C})$ prend par contre tout son sel lorsqu'on essaie de la généraliser aux espaces de modules $M_{g,n}$.

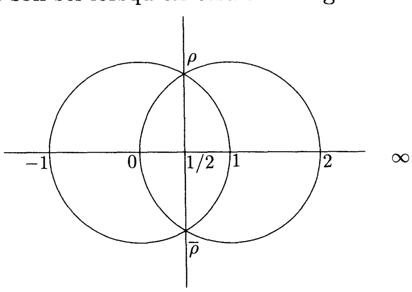

FIGURE 1

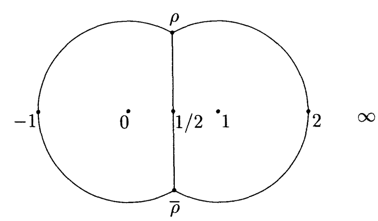

FIGURE 2