317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(973) *Aspects de l'indépendance algébrique en caractéristique non nulle*

Federico PELLARIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2007
59e année, 2006-2007, n° 973, p. 205 à 242

ASPECTS DE L'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE [d'après Anderson, Brownawell, Denis, Papanikolas, Thakur, Yu,...]

par **Federico PELLARIN**

1. INTRODUCTION

Un célèbre théorème de Baker affirme que si $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que $e^{\ell_i} \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout i, alors $1, \ell_1, \ldots, \ell_n$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Sous ces mêmes conditions, on conjecture aussi que $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont algébriquement indépendants : les nombres $\pi, \log 2, \log 3, \log 5, \ldots$ seraient en particulier algébriquement indépendants.

Le caractère arithmétique des valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(n) = \sum_{k\geq 1} k^{-n}$ aux entiers $n \geq 2$ est encore moins connu. On connaît la transcendance de $\zeta(2) = \pi^2/6$ et de $\zeta(2n)$ en général grâce à la transcendance de π et aux formules d'Euler, l'irrationalité de $\zeta(3)$ par Apéry, et l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ d'une infinité de nombres dans l'ensemble $\{\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots\}$ par Ball et Rivoal. On conjecture l'indépendance algébrique des nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$

Des questions similaires se posent pour les valeurs de la fonction gamma d'Euler Γ aux rationnels non entiers. La conjecture de Rohrlich-Lang affirme que les seules relations algébriques entre ces nombres sont obtenues en combinant les équations fonctionnelles connues, mais on sait démontrer seulement l'indépendance algébrique de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et de $\Gamma(r)$ avec r congru à $1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/6, 5/6$ modulo 1.

Soient $q = p^r$ une puissance d'un nombre premier, $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, T une indéterminée ; écrivons $A = \mathbb{F}_q[T]$, $K = \mathbb{F}_q(T)$. La valuation opposée du degré (en T) $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ donnée par $v(a/b) = \deg b - \deg a$ donne la valeur absolue $|\cdot|$ définie par $|x| = q^{-v(x)}$.

On note $K_\infty = \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ (complété de K pour v). Le degré d'une clôture algébrique $\overline{K_\infty}$ sur K_∞ est infini et $\overline{K_\infty}$ n'est pas complet pour l'unique extension de $|\cdot|$.

Soit C le complété de $\overline{K_\infty}$ pour $|\cdot|$. D'après le lemme de Krasner, C est à la fois algébriquement clos et complet ; son corps résiduel est $\overline{\mathbb{F}_q}$. On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on fixe une fois pour toutes des plongements $\overline{K} \subset \overline{K_\infty} \subset C$.

Nous appellerons *nombres* les éléments de C. Un nombre qui n'est pas dans $\overline{K}$ est un nombre *transcendant*. Des nombres $a_1, \ldots, a_m$ tels que le sous-corps $\overline{K}(a_1, \ldots, a_m)$ de C soit de degré de transcendance m sur $\overline{K}$ sont *algébriquement indépendants.*

Il existe des nombres dans C qui se trouvent en analogie profonde avec les nombres complexes $2\pi i$, $\log n$ avec n entier ≥ 2, $\zeta(n)$ avec $n \geq 2$ (et bien d'autres). On expliquera certains aspects de ces analogies dans ce texte mais nous pouvons dire tout de suite qu'il est possible de retrouver ces nombres dans les *matrices de périodes* de *t-modules*, qui sont essentiellement des groupes additifs $\mathbb{G}_a^d$ munis de certaines actions de A (décrites plus bas). La notion de t-module a été introduite par Anderson ; on peut y attacher des *fonctions exponentielles.* Elle a poussé dans la bonne direction une théorie de la transcendance, de l'indépendance K-linéaire et de l'indépendance algébrique dans C car on dispose aujourd'hui, grâce à Jing Yu, d'un analogue du théorème du sous-espace analytique de Wüstholz pour une classe très générale de t-modules qui sera décrit dans ce texte.

Anderson a aussi introduit les *t-motifs*, qui sont essentiellement des ensembles de morphismes $\mathbb{F}_q$-linéaires de $\mathbb{G}_a^n$ vers $\mathbb{G}_a$ avec action de A, et des conditions de compatibilité. On peut construire des catégories de t-modules et des catégories de t-motifs anti-équivalentes, mais les t-motifs possèdent des avantages sur les t-modules, remarqués par Anderson, quand on s'intéresse à l'interpolation analytique de leurs périodes.

Guidés par ce point de vue, Anderson, Brownawell et Papanikolas ont démontré un critère d'indépendance linéaire pour les valeurs de solutions de certains systèmes aux *σ-différences.* Ce critère a permis à Papanikolas de démontrer l'analogue de la conjecture d'indépendance algébrique des logarithmes des nombres algébriques mentionnée au début de cette introduction. Par une méthode différente, liée à la méthode de Mahler sur $\mathbb{C}$, Denis a obtenu des cas particuliers de cette conjecture. Grâce au travail de Chieh-Yu Chang et Jing Yu, nous savons calculer toutes les relations de dépendance algébrique entre les valeurs de la fonction zêta de Goss aux entiers positifs. Le critère d'indépendance linéaire d'Anderson, Brownawell et Papanikolas a aussi permis à ces auteurs de déterminer un analogue de la conjecture de Rohrlich-Lang pour les valeurs de la fonction gamma *géométrique* de Thakur.

2. MODULES DE DRINFELD ET t-MODULES

Un A-*réseau* Λ *de rang* $n \geq 1$ (ou plus simplement réseau de rang $n \geq 1$) est un A-module libre de rang $n \geq 1$ *discret* (qui a intersection finie avec toute boule de C). Il en existe de tout rang fini : par exemple $\Lambda = A\lambda_1 + \cdots + A\lambda_n$ quand $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments K_∞-linéairement indépendants de C. Écrivons, par analogie avec la fonction sigma de Weierstrass :

$$e_\Lambda(z) = z \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} (1 - z/\lambda). \tag{1}$$

Ce produit converge (uniformément sur les boules) vers une fonction

$$e_\Lambda : C \to C$$

admettant un développement en série entière $e_\Lambda(z) = \sum_{i \geq 0} \alpha_i z^{q^i}$ avec $\alpha_i \in C$, convergeant pour tout $z \in C$. C'est la fonction *exponentielle* de Λ ; elle vérifie $e_{c\Lambda}(cz) = ce_\Lambda(z)$ pour tout $c \in C^\times$, elle est surjective et $\mathbb{F}_q$-linéaire. La dérivée de_Λ/dz de e_Λ est égale à 1, donc e_Λ possède une série réciproque locale en 0 que nous notons $\log_\Lambda$ et qui converge dans toutes les boules de centre 0 ne contenant pas d'élément de Λ.

Soit a un polynôme dans $A = \mathbb{F}_q[T]$. L'analogue du théorème de Liouville pour les séries entières $\sum_i c_i z^i$ convergentes dans toute boule de C (cf. [**44**]) implique l'existence d'un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire $\phi(a)$ à coefficients dans C tel que :

$$e_\Lambda(az) = \phi(a)(e_\Lambda(z)). \tag{2}$$

L'application $a \mapsto \phi(a)$ définit un homomorphisme injectif de $\mathbb{F}_q$-algèbres

$$A \to \mathbf{End}_{\mathbb{F}_q\text{-lin.}}(\mathbb{G}_a/C) = C[\tau]$$

(endomorphismes $\mathbb{F}_q$-linéaires définis sur C), où $C[\tau]$ est l'anneau non commutatif des polynômes en τ avec l'opération $\tau c = c^q \tau$ pour $c \in C$. Ceci induit une nouvelle structure de A-module sur le groupe $\mathbb{G}_a$ et un isomorphisme $C \cong C/\Lambda$. Noter que, si $z \in C$, $a \in A \setminus \{0\}$ et $az \in \Lambda$, alors $e_\Lambda(z)$ est dans le noyau de $\phi(a)$.

Pour $n \geq 1$, il existe des éléments $l_0, \ldots, l_n \in C$ tels que

$$\phi(T) = \sum_{0 \leq i \leq n} l_i \tau^i \quad \text{avec} \quad l_n \neq 0 \quad \text{et} \quad l_0 = T. \tag{3}$$

On en déduit que, pour tout $a \in A$, il existe $l_0(a), \ldots, l_{n\deg(a)}(a) \in C$ tels que

$$\phi(a) = \sum_{0 \leq i \leq n \deg a} l_i(a) \tau^i,$$

avec $l_0(a) = a$, $l_{n \deg a}(a) \neq 0$, et $\phi(\lambda) = \lambda \tau^0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q$.

DÉFINITION 2.1. — *Un homomorphisme injectif de $\mathbb{F}_q$-algèbres $\phi : A \to C[\tau]$ satisfaisant* (3) *est appelé* A-module de Drinfeld de rang $n \geq 1$ (*ou plus simplement, module de Drinfeld de rang* $n \geq 1$). *On dit que le module de Drinfeld ϕ est* défini *sur $\overline{K}$ si $l_1, \ldots, l_n \in \overline{K}$.*

L'application $\Lambda \mapsto \phi$ avec $\phi(a)$ comme dans (2) est une bijection entre l'ensemble des réseaux de rang n et l'ensemble des modules de Drinfeld de rang n. On dit que Λ est le *réseau* des périodes de ϕ. Pour construire le réseau des périodes associé à un module de Drinfeld ϕ comme dans (3), il suffit de construire l'exponentielle associée $e_\phi(z) = \sum_i \alpha_i z^{q^i}$. Tenant compte de (2) et de la convention $\alpha_i = 0$ pour $i < 0$, on trouve les relations dans C :

$$(T^{q^i} - T)\alpha_i = l_1(T)\alpha_{i-1}^q + \cdots + l_n(T)\alpha_{i-n}^{q^n}, \quad i \geq 1, \tag{4}$$

auxquelles il convient d'ajouter $\alpha_0 = 1$.

Sauf mention contraire, dans la suite tout module de Drinfeld sera défini sur $\overline{K}$. Soient ϕ_1, ϕ_2 deux modules de Drinfeld. Les *morphismes* $\phi_1 \to \phi_2$ sont les applications $\mathbb{F}_q$-linéaires $\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ compatibles aux deux différentes actions de A définissant ϕ_1, ϕ_2. On note $\mathbf{Hom}(\phi_1, \phi_2)$ le A-module des morphismes de ϕ_1 vers ϕ_2. Un morphisme non nul $\phi_1 \to \phi_2$ est une *isogénie*. Si ϕ_1, ϕ_2 sont de rangs différents, il ne sont pas *isogènes* : il n'existe pas d'isogénie $\phi_1 \to \phi_2$. Si Λ_1, Λ_2 sont les réseaux des périodes associés à ϕ_1, ϕ_2 isogènes, $\mathbf{Hom}(\phi_1, \phi_2)$ s'identifie à l'ensemble des $z \in C$ tels que $z\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. On note $\mathbf{End}(\phi) = \mathbf{Hom}(\phi, \phi)$; c'est une A-algèbre de type fini. En revenant à deux modules de Drinfeld ϕ_1, ϕ_2, $\mathbf{Hom}(\phi_1, \phi_2)$ est aussi un $\mathbf{End}(\phi_1)$-module de rang fini.

2.1. Module de Carlitz

Comme A est principal, les modules de Drinfeld de rang 1 sont tous *isomorphes* entre eux. Le module de Carlitz (cf. **[18]**[(1)]) est le module de Drinfeld de rang 1 associé à l'homomorphisme $A \to C[\tau]$ défini par

$$T \mapsto T\tau^0 + \tau,$$

que l'on note ϕ_{Car}. À l'origine, il a été introduit pour développer une théorie des extensions cyclotomiques de K débouchant sur une solution dans ce contexte au douzième problème de Hilbert (par Carlitz et Hayes **[16, 48, 49]**) et a été le précurseur des modules de Drinfeld.

Le réseau de périodes associé s'écrit $\Lambda = \overline{\pi} A$ pour un certain élément $\overline{\pi}$ défini à multiplication près par un élément de $\mathbb{F}_q^\times$. Dans la suite, on pose $e_{\mathrm{Car}} = e_{\overline{\pi} A}$ et $\log_{\mathrm{Car}} = \log_{\overline{\pi} A}$. Dans ce texte, on étudiera plusieurs propriétés de $\overline{\pi}$ mais il convient tout de suite d'en citer trois : on a $\overline{\pi} \in \mathbb{F}_q(((-T)^{1/(q-1)})) \setminus K_\infty$, $\overline{\pi}^{q-1} \in K_\infty$ et

(1) Dans les premiers travaux, Carlitz étudiait plutôt le module $T \mapsto T\tau^0 - \tau$.