326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(982) *Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général*

Stéphane DRUEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2007
60e année, 2007–2008, n° 982, p. 1 à 38

EXISTENCE DE MODÈLES MINIMAUX POUR LES VARIÉTÉS DE TYPE GÉNÉRAL [d'après Birkar, Cascini, Hacon et McKernan]

par **Stéphane DRUEL**

INTRODUCTION

La classification des variétés[1] projectives lisses à équivalence birationnelle près est un problème central en géométrie algébrique. On rappelle que deux variétés X et X' sont dites birationnellement équivalentes ou simplement birationnelles s'il existe un isomorphisme d'un ouvert dense de X sur un ouvert dense de X'.

Un des premiers objets intrinsèquement attachés à une variété projective lisse X est son *fibré canonique* ω_X, défini comme le déterminant de son fibré cotangent. Pour tout entier m, le m-ième *plurigenre* est la dimension de l'espace vectoriel des sections globales du fibré en droites $\omega_X^{\otimes m}$; on le note $P_m(X)$. On définit un invariant numérique de X, appelé sa *dimension de Kodaira*, en posant $\kappa(X) = \limsup_{m\to+\infty} \dfrac{\log P_m(X)}{\log m}$. On a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, \dim(X)\}$; on dit que X est *de type général* si $\kappa(X) = \dim(X)$.

Il est connu depuis longtemps que deux variétés projectives lisses birationnelles ont de nombreuses propriétés en commun : la dimension de Kodaira et les plurigenres sont des exemples d'invariants birationnels des variétés projectives lisses. La question peut être formulée ainsi.

Existe-t-il un « bon » représentant d'une classe d'équivalence birationnelle donnée ?

Le cas des courbes est particulier puisque deux courbes (projectives lisses) birationnelles sont isomorphes. Le cas des surfaces est plus compliqué, toute classe d'équivalence birationnelle contenant une infinité de surfaces projectives lisses deux à deux non isomorphes. La solution au problème précédent a été donnée par les géomètres italiens au début du siècle dernier. Soit X une surface projective lisse. Il existe une

[1] Nous travaillons sur le corps des nombres complexes et toutes nos variétés sont algébriques et irréductibles.

surface projective lisse $X_\bullet$ et un morphisme birationnel $X \to X_\bullet$ tels que ou bien le fibré canonique $\omega_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif, on dit que $X_\bullet$ est un *modèle minimal* de X, ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tel que $\dim(Y_\bullet) \leqslant 1$ et $\omega_{X_\bullet}^{\otimes -1}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$, le morphisme $c_\bullet$ est appelé une *fibration de Mori*(2). On peut être plus précis : dans la seconde alternative, ou bien $X_\bullet$ est isomorphe à $\mathbf{P}^2$ et $\dim(Y_\bullet) = 0$ ou bien $X_\bullet \to Y_\bullet$ est une surface géométriquement réglée. On obtient $X_\bullet$ en contractant successivement des courbes exceptionnelles de première espèce, *i.e.* des courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -1. La variété $X_\bullet$ est unique à quelques exceptions près bien comprises.

Il faut attendre le début des années 80 et les travaux de Mori ([**20**]) et Reid ([**23**]) pour entrevoir la possibilité de généraliser l'approche italienne à la dimension supérieure. Les obstacles sont nombreux. Il existe des variétés projectives lisses de dimension 3, de type général, n'ayant pas de modèle minimal lisse (voir par exemple [**24**, Examples 2.8]) ; il faut donc considérer des variétés singulières. Soit X une variété projective lisse. Le programme de Mori ou programme des modèles minimaux ou encore MMP (« Minimal Model Program » en anglais) prédit l'existence d'une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à X, peu singulière(3), telle que ou bien le diviseur canonique $K_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif, ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tel que $\dim(X_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$. Il prédit aussi comment obtenir $X_\bullet$ au moyen de transformations birationnelles ; il ne suffit plus, comme c'était le cas pour les surfaces, de contracter des diviseurs, il faut introduire de nouvelles transformations birationnelles, les flips, dont l'existence est conjecturale. La dernière difficulté est la question de l'aboutissement du programme ou encore le problème de la non-existence de suite infinie de flips qui, là encore, est conjecturale.

À la suite de contributions de Kawamata, Shokurov et Tsunoda pour les principales, Mori prouve l'existence des flips en dimension 3 ([**21**]). L'existence des flips en dimension 4 est due à Shokurov ([**28**], voir également [**6**]). La non-existence de suite infinie de flips est démontrée par Shokurov ([**25**]) en dimension 3 et par Kawamata, Matsuda et Matsuki ([**15**]) en dimension 4. Le programme des modèles minimaux est donc complet en dimension $\leqslant 4$.

De larges parties du MMP ont été généralisées en dimension $\geqslant 5$ mais les principales conjectures demeuraient : l'existence des flips et la non-existence de suite infinie de flips.

Le but de ce texte est d'exposer les travaux récents de Birkar, Cascini, Hacon et McKernan sur ces questions. Les progrès réalisés sont spectaculaires : ils montrent,

(2) Le point de vue adopté ici, généralement attribué à Reid, diffère de celui des géomètres italiens.
(3) À singularités terminales.

par exemple, l'existence des flips en toutes dimensions (voir le corollaire 2.5 pour un énoncé précis) et la non-existence de suite infinie de flips dirigés lorsque X est de type général (voir le corollaire 2.8). Ils n'obtiennent pas la non-existence de suite infinie de flips en toute généralité mais leurs résultats sont néanmoins suffisants pour beaucoup d'applications.

THÉORÈME 0.1. — *Soit X une variété projective lisse.*

1. *Si X est de type général, alors il existe une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à X, peu singulière, telle que $K_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif.*
2. *Si K_X n'est pas pseudo-effectif, alors il existe encore une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à X, peu singulière, et un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tels que $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$.*

Soit X une variété projective lisse. La finitude de l'algèbre canonique

$$\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(kK_X))$$

est un problème classique et difficile. On sait qu'elle est de type fini sur $\mathbf{C}$ si $\dim(X) \leqslant 3$ grâce aux travaux de Zariski si $\dim(X) = 2$, Fujita et ceux que nous avons déjà cités si $\dim(X) = 3$; très peu de choses étaient connues jusqu'alors en dimension plus grande.

THÉORÈME 0.2. — *Soit X une variété projective lisse. L'algèbre canonique*

$$\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(kK_X))$$

est de type fini sur $\boldsymbol{C}$[4].

Le lien avec la question initiale est le suivant. L'énoncé précédent est une conséquence (facile) de l'existence de modèles minimaux et de la conjecture d'abondance qui, $X_\bullet$ étant un modèle minimal de X, prédit que le système linéaire $|mK_{X_\bullet}|$ est sans point base pour $m \gg 0$ (voir par exemple [**23**, Conjecture 4.6]).

L'approche de Birkar, Cascini, Hacon et M^c^Kernan est un peu différente, ils ne montrent ni l'existence de modèles minimaux, ni la conjecture d'abondance en général (voir théorèmes 2.1 et 1.18).

Le texte est organisé de la façon suivante. On rassemble dans la première partie des résultats « classiques » sur le programme des modèles minimaux et ses extensions aux paires d'une part et à la situation relative d'autre part. On présente les résultats

[4] Une preuve de ce résultat lorsque X est supposée de type général est annoncée dans [**31**].

en début de seconde partie et on donne ensuite les grandes lignes des démonstrations des principaux résultats.

Je remercie pour leur aide à la préparation de ce texte Laurent Bonavero, Sébastien Boucksom, Philippe Eyssidieux, Caroline Gruson, Catriona Maclean, James M[c]Kernan et Tanguy Rivoal, ainsi que tous les participants au groupe de travail de Grenoble.

1. LE MMP

1.1. Notations et rappels

Dans la suite de ce texte, le symbole X/Z désigne un morphisme projectif $X \to Z$ de variétés quasi-projectives normales. Si X/Z et Y/Z sont deux tels objets, le symbole $X/Z \to Y/Z$ (resp. $X/Z \dashrightarrow Y/Z$) désigne un morphisme $\pi : X \to Y$ (resp. une application rationnelle $\pi : X \dashrightarrow Y$) tel que $g \circ \pi = f$ où f et g sont respectivement les morphismes de X et Y vers Z.

Soit $f : X \to Z$ comme ci-dessus. Un diviseur de Weil sur X est une combinaison linéaire formelle $D = \sum_{i \in I} d_i D_i$, à coefficients entiers, d'hypersurfaces irréductibles de X. Il est dit effectif lorsque tous les coefficients sont positifs ; on écrit alors $D \geqslant 0$. Il est dit premier si une seule hypersurface irréductible apparaît dans D et qu'elle a coefficient 1. On considérera aussi des $\mathbf{Q}$-diviseurs et des $\mathbf{R}$-diviseurs. On définit $\llcorner D \lrcorner = \sum_{i \in I} \llcorner d_i \lrcorner D_i$ et $\ulcorner D \urcorner = \sum_{i \in I} \ulcorner d_i \urcorner D_i$.

Toute fonction rationnelle non nulle u sur X a un diviseur, celui de ses pôles et zéros, noté $\operatorname{div}(u)$.

On désigne par K_X un diviseur canonique sur X, c'est-à-dire le diviseur d'une forme différentielle méromorphe de degré maximal ; si X est lisse, on a $\mathscr{O}_X(K_X) \simeq \omega_X$.

Un diviseur de Cartier sur X est un diviseur de Weil qui peut être défini localement par une seule équation.

Le groupe des diviseurs de Weil sur X à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$) est noté $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$). Le sous-groupe de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ formé des diviseurs de Cartier sur X est noté $\operatorname{Div}(X)$. Un $\mathbf{Q}$-diviseur (resp. $\mathbf{R}$-diviseur) de Weil est dit $\mathbf{Q}$-Cartier (resp. $\mathbf{R}$-Cartier) s'il est dans le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel ($\mathbf{R}$-sous-espace vectoriel) de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$) engendré par $\operatorname{Div}(X)$. L'ensemble des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Weil $\mathbf{Q}$-Cartier (resp. $\mathbf{R}$-diviseurs de Weil $\mathbf{R}$-Cartier) est noté $\operatorname{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\operatorname{Div}(X)_{\mathbf{R}}$).

Les diviseurs D_1 et D_2 de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits $\mathbf{Q}$-linéairement équivalents relativement à Z (resp. $\mathbf{R}$-linéairement équivalents relativement à Z) et on note $D_1 \sim_{\mathbf{Q},Z} D_2$ (resp. $D_1 \sim_{\mathbf{R},Z} D_2$) s'il existe $u_j \in \operatorname{Rat}(X) \setminus \{0\}$, $r_j \in \mathbf{Q}$