326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(990) *Géométrie des espaces métriques mesurés : les travaux de Lott, Villani, Sturm*

Michel LEDOUX

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2008
60e année, 2007–2008, nº 990, p. 257 à 279

GÉOMÉTRIE DES ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS : LES TRAVAUX DE LOTT, VILLANI, STURM

par **Michel LEDOUX**

L'étude géométrique des espaces métriques mesurés s'est récemment dotée d'une définition synthétique de borne inférieure de courbure de Ricci issue de la théorie du transport optimal de mesures grâce aux travaux parallèles et complémentaires de J. Lott et C. Villani [**34, 35**] et K.-T. Sturm [**52, 53**].

L'analogue d'une borne sur la courbure sectionnelle riemannienne dans un espace métrique est ancien, et remonte aux travaux de A. Aleksandrov qui a fourni une définition purement métrique, par comparaison de triangles (voir [**13**], [**12**], [**24**]...). Un aspect significatif de cette définition métrique est sa stabilité par limite de Gromov-Hausdorff, conduisant ainsi à une notion de courbure sur des espaces éventuellement singuliers. (La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts (X, d) et (X', d') peut être définie comme l'infimum de la distance de Hausdorff $\delta(j(X), j'(X'))$ sur tous les plongements isométriques j, j' de (X, d) et (X', d') respectivement dans un espace métrique (Y, δ).)

Dans le cas de la courbure de Ricci d'une variété riemannienne, une information seulement métrique est insuffisante, et la mesure de volume entre en jeu, reflétant le contrôle de la déformation du volume riemannien par la courbure. La problématique s'inscrit naturellement dans le cadre du théorème de précompacité de M. Gromov pour la famille des variétés riemanniennes uniformément de courbure de Ricci minorée par K, de dimension majorée par N et de diamètre borné par D [**24**], dont les éléments limites sont des espaces métriques mais plus nécessairement des variétés (voir [**16**] pour un examen approfondi de ces espaces limites). L'étude entreprise par J. Lott, C. Villani [**34, 35**] et K.-T. Sturm [**52, 53**] introduit une définition de minoration de la courbure (couplée avec une dimension) dans un espace métrique mesuré (X, d, μ), étendant la minoration de la courbure de Ricci riemannienne, par une propriété de convexité d'une fonctionnelle de type entropique le long de géodésiques dans l'espace des mesures de probabilités sur X. Cette définition est directement inspirée de son analogue sur les espaces réguliers qui s'effectue à travers un transport optimal de mesures. Ces développements récents ont pris place au carrefour de l'analyse, de la géométrie et du calcul des probabilités, notamment à travers le transport de Brenier-Rachev-Rüschendorf-McCann [**11**], [**48**], [**38**], ainsi que par l'examen de diverses inégalités géométriques et fonctionnelles avec les travaux de D. Bakry et M. Émery [**5**], [**4**], F. Otto et C. Villani [**43**], D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger [**19**], [**20**], D. Cordero-Erausquin [**17**], M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm [**47**] ...

Cette courte présentation ne donne qu'un aperçu de ces développements, se limitant aux aspects principaux, plusieurs autres introductions (dont ce texte s'inspire) étant déjà disponibles [**18**], [**33**], [**55**], sans compter la monumentale exposition [**56**] de C. Villani lui-même lors de l'École d'Été de Probabilités de Saint-Flour 2005, à paraître dans la collection des Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.

1. LES PRÉMISSES RIEMANNIENNES ET FONCTIONNELLES

Le rôle de la mesure (de volume) dans l'obtention de bornes ou d'inégalités en géométrie riemannienne est souvent un élément clef. L'exemple de la minoration spectrale de Lichnerowicz (cf. e.g. [**23**]) est significatif à cet égard. Soient (M, g) une variété riemannienne compacte (sans bord) de dimension n (≥ 2), Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M (avec la convention des analystes), et λ_1 la première valeur propre non-triviale de Δ. Alors, si $\mathrm{Ric}_x \geq K$, $K > 0$ (au sens où, pour tout $x \in M$ et tout vecteur tangent $v \in T_x(M)$, $\mathrm{Ric}_x(v, v) \geq K|v|^2$),

$$\lambda_1 \geq \frac{nK}{n-1}\,. \tag{1}$$

(Une borne un peu moins fine, indépendante néanmoins de la dimension, est tout simplement $\lambda_1 \geq K$.) La démonstration est la suivante. D'après la formule de Bochner (dans sa forme métrique), pour toute fonction régulière f sur M, en tout point,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) &= \big\|\mathrm{Hess}(f)\big\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \\ &\geq \frac{1}{n}\,(\Delta f)^2 + K\,|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Intégrer les deux membres de cette inégalité par rapport à l'élément de volume riemannien dx sur M de sorte que, après intégration par parties de part et d'autre,

$$\int_M (\Delta f)^2 dx \geq \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dx + K \int_M f(-\Delta f) dx.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité à une fonction propre non triviale de $-\Delta$ de valeur propre $\lambda_1 > 0$.

Cette démonstration peut être adaptée pour une autre forme volume, et cette observation a fondé une partie des résultats pionniers de D. Bakry et M. Émery [**5**], [**4**] dans l'étude d'inégalités de trou spectral, de Sobolev logarithmique et de Sobolev pour des opérateurs de diffusion généralisant le laplacien sur une variété. Un exemple simple est le cas d'une mesure de probabilités $d\mu(x) = \mathrm{e}^{-V(x)}dx$ sur $\mathbb{R}^n$ pour un potentiel (régulier) V tel que, en tout point, $\mathrm{Hess}_x(V) \geq K$ pour un $K > 0$ (la mesure gaussienne standard $(2\pi)^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/2}dx$, $|\cdot|$ désignant la norme euclidienne, par exemple avec $K = 1$). La mesure μ est invariante et symétrique pour l'opérateur linéaire $\mathrm{L} = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$, et l'hypothèse de convexité sur V se retrouve dans l'analogue de la formule de Bochner pour L,

$$\begin{aligned}\Gamma_2(f,f) &\equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\mathrm{L}f) \\ &= \big\|\mathrm{Hess}(f)\big\|_2^2 + \mathrm{Hess}(V)(\nabla f, \nabla f) \geq K\,|\nabla f|^2.\end{aligned} \tag{3}$$

(Noter que, dans cette famille d'exemples, il n'est en général pas possible d'introduire dans l'inégalité (3) un analogue $\frac{1}{n}\,(\mathrm{L}f)^2$ du terme dimensionnel pour un $n < \infty$.) D. Bakry et M. Émery démontrent que la mesure μ vérifie l'inégalité de Poincaré ou de trou spectral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu \leq \frac{1}{K}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 0 \tag{4}$$

(qui caractérise variationnellement le λ_1 sur une variété), ainsi que l'inégalité (plus forte) de Sobolev logarithmique ([**50**], [**25**])

$$H_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \log f d\mu \leq \frac{1}{2K}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f}\,|\nabla f|^2 d\mu, \quad f > 0,\ \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 1. \tag{5}$$

Le membre de gauche $H_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \log f d\mu$ définit l'entropie relative de la densité de probabilités f par rapport à μ, et l'intégrale $I_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f}\,|\nabla f|^2 d\mu$ l'information de Fisher. (Que l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) renforce l'inégalité de Poincaré (4) peut se constater en appliquant la première à $1+\varepsilon f$, $\int f d\mu = 0$, et en faisant tendre ε vers 0.) Dans cette étude, ils mettent en jeu une méthode de paramétrisation le long du semi-groupe de la chaleur $(P_t)_{t\geq 0}$ associé à l'opérateur L (solution de l'équation $\frac{\partial}{\partial t}P_t f = \mathrm{L}P_t f$) par la propriété de flot de gradient

$$\frac{d}{dt}\,H_\mu(P_t f) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{L}P_t f \log P_t f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{P_t f}\,|\nabla P_t f|^2 d\mu.$$

L'opérateur Γ_2 issu de la formule de Bochner (3) décrit par la formule

$$\frac{d^2}{dt^2}\,H_\mu(P_t f) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t f\,\Gamma_2(\log P_t f, \log P_t f) d\mu$$

les propriétés de convexité de l'entropie H_μ le long de P_t qui conduisent à l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) sous l'hypothèse de convexité uniforme d'ordre $K > 0$

du potentiel V. Dans [**3**], D. Bakry démontre également une importante équivalence de la minoration de courbure $\Gamma_2 \geq K$ en une condition de commutation

$$|\nabla P_t f| \leq \mathrm{e}^{-Kt}\, P_t\big(|\nabla f|\big) \tag{6}$$

entre les actions du semi-groupe et du gradient sur toute fonction f suffisamment régulière (qui permet d'atteindre les formes locales des inégalités précédentes). Ces techniques ont permis d'établir nombre d'inégalités fonctionnelles pour des opérateurs de Markov et leurs formes de Dirichlet associées [**4**]. Ce cadre couvre naturellement le cas des variétés à poids $d\mu = \mathrm{e}^{-V} dx$ pour lesquelles la minoration sur l'opérateur Γ_2 s'exprime à travers le critère

$$\mathrm{Ric}_x + \mathrm{Hess}_x(V) \geq K, \quad x \in M. \tag{7}$$

Le tenseur de Bakry-Émery $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,(V)$, dont plusieurs aspects géométriques et topologiques sont présentés dans [**39**] et [**32**], apparaît également dans l'équation du flot de Ricci (modifiée) considérée par G. Perelman [**44**]. La comparaison avec la minoration (2) permet aussi d'introduire une notion de couple courbure-dimension (pas nécessairement la dimension topologique pour des opérateurs différentiels du second ordre sur une variété : par exemple, comme noté plus haut, $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne et de la mesure gaussienne standard définit de cette façon un espace de courbure 1 et de dimension infinie). Nous renvoyons à la synthèse [**4**] pour plus de détails. Si ces définitions permettent de définir une notion de minorant de la courbure de Ricci pour des espaces et modèles généraux (variétés riemanniennes, graphes, modèles de mécanique statistique, etc.) et de travailler avec elle, celle-ci nécessite néanmoins la donnée préalable, non triviale, d'une structure d'opérateur de diffusion sur ces espaces.

C'est une autre technique de paramétrisation qui va permettre de considérer une notion de minorant de courbure de Ricci dans des espaces métriques mesurés assez généraux, sans donnée complémentaire, étendant la courbure sur les variétés et présentant de remarquables propriétés de stabilité, notamment par limite de Gromov-Hausdorff (mesurée). Cette paramétrisation est issue de la théorie du transport de masse et, à nouveau, la recherche et la compréhension d'inégalités fonctionnelles et géométriques, comme par exemple celle de Brunn-Minkowski, ont joué un rôle prépondérant dans son développement.

L'inégalité géométrique de Brunn-Minkowski-Lusternik indique que, pour des parties compactes non vides A, B de $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}(A+B)^{1/n} \geq \mathrm{vol}(A)^{1/n} + \mathrm{vol}(B)^{1/n}, \tag{8}$$

où $A + B$ désigne la somme de Minkowski $\{x + y; x \in A, y \in B\}$. En choisissant pour B une boule euclidienne de rayon tendant vers 0, cette inégalité conduit à l'inégalité