339 ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1012) *Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p-adiques*

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2009
62^e année, 2009-2010, n° 1012, p. 1 à 30

GROUPE DE CHOW DES ZÉRO-CYCLES SUR LES VARIÉTÉS p-ADIQUES [d'après S. Saito, K. Sato *et al.*]

par **Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE**

INTRODUCTION

Soient k un corps et X une k-variété algébrique projective, lisse et géométriquement irréductible (cette dernière hypothèse sera souvent tacitement faite). On note $Z_0(X)$ le groupe des zéro-cycles sur X, c'est-à-dire le groupe abélien libre sur les points fermés de X (points x du schéma X dont le corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie de k). On dispose d'une application degré

$$\deg : Z_0(X) \to \mathbf{Z}$$

définie par linéarité à partir de l'application envoyant un point fermé x sur le degré $[\kappa(x) : k]$.

À tout couple formé d'une courbe fermée intègre $C \subset X$ et d'une fonction rationnelle non nulle $f \in k(C)^{\times}$, on associe un zéro-cycle, le diviseur de f. Celui-ci est ainsi défini : on considère la normalisation $\tilde{C} \to C$ de la courbe C, et le morphisme composé $\pi : \tilde{C} \to C \to X$. On définit alors $\operatorname{div}(f) = \pi_*(\operatorname{div}_{\tilde{C}}(f))$. Le groupe de Chow des zéro-cycles sur X est par définition le quotient de $Z_0(X)$ par le sous-groupe engendré par tous les $\operatorname{div}(f)$ pour tous les couples (C, f).

Comme la k-variété X est projective, l'application degré induit un homomorphisme $\deg : CH_0(X) \to \mathbf{Z}$. On note $A_0(X)$ le noyau de cette application. On dispose donc d'une suite exacte

$$0 \to A_0(X) \to CH_0(X) \to \mathbf{Z}.$$

L'image de la flèche degré est un sous-groupe $\mathbf{Z}.I_X \subset \mathbf{Z}$ d'indice fini. La suite est scindée si X possède un zéro-cycle z_0 de degré 1, *ce qu'on suppose désormais dans cette introduction.*

À la k-variété X on associe sa variété de Picard $\mathrm{Pic}^0_{X/k,red}$, qui est une variété abélienne. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}(k) \to \mathrm{Pic}X \to \mathrm{NS}(X) \to 0$$

où $\mathrm{NS}(X)$ est un groupe abélien de type fini.

La variété abélienne duale de $\mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}$ est la variété d'Albanese $\mathrm{Alb}_{X/k}$ de X. À la donnée de z_0 est associé un k-morphisme

$$\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}_{X/k}$$

induisant un isomorphisme sur les variétés de Picard de ces deux variétés. Ce morphisme induit un homomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{alb}_X : A_0(X) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(k)$$

qui ne dépend pas du choix de z_0.

Lorsque $\dim(X) = 1$, c'est-à-dire lorsque X est une courbe (projective, lisse), on a un isomorphisme $\mathrm{Pic}X \overset{\simeq}{\to} CH_0(X)$ qui induit un isomorphisme $\mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}(k) \overset{\simeq}{\to} A_0(X)$. La flèche $\mathrm{alb}_X : A_0(X) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(k)$ est un isomorphisme.

Les propriétés des groupes de points rationnels de variétés abéliennes donnent alors des théorèmes sur la structure des groupes $CH_0(X)$ et $A_0(X)$. En particulier, pour X/k une courbe de genre g avec ou sans zéro-cycle de degré 1, on a les propriétés suivantes :

(1) Si k est un corps de type fini sur le corps premier, le groupe $CH_0(X)$ est un groupe abélien de type fini (Mordell-Weil).

(2) Si k est un corps fini, le groupe $A_0(X)$ est fini.

(3) Si k est un corps p-adique (ce qui dans cet exposé signifie extension finie du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$), le groupe $A_0(X)$ est extension d'un groupe fini par un sous-groupe isomorphe à une somme directe de g exemplaires de l'anneau des entiers de k (Lutz, Mattuck).

En conséquence,

(3.1) Le groupe $A_0(X)$ est somme directe d'un groupe fini (d'ordre premier à p) et d'un groupe p'-divisible (c'est-à-dire divisible par tout entier premier à p).

(3.2) Pour tout entier $n > 0$, le quotient $CH_0(X)/n$ est fini.

(3.3) Pour presque tout premier l, on a $A_0(X)/l = 0$.

(3.4) Le sous-groupe de torsion de $CH_0(X)$ est fini.

On peut en outre détecter les classes dans $CH_0(X)$ au moyen de la cohomologie étale sur X (voir le paragraphe 1 ci-après).

Il est naturel de se demander si certaines parmi ces propriétés du groupe $CH_0(X)$ valent encore pour une k-variété projective lisse X de dimension quelconque.

Dans la situation (1), même pour k le corps des rationnels, en dehors des cas qui se réduisent formellement au théorème de Mordell-Weil, on n'a aucun résultat non trivial sur la finitude de $CH_0(X)/n$ pour $n > 1$ ou sur la finitude de la dimension du $\mathbf{Q}$-vectoriel $CH_0(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Dans la situation (2), qui porte sur le cas des corps finis, la finitude de $A_0(X)$ est un théorème de K. Kato et S. Saito [**27**]. On en sait beaucoup plus : voir à ce sujet l'exposé récent de T. Szamuely [**42**] sur le corps de classes de dimension supérieure.

Le présent exposé porte sur le cas des corps p-adiques.

Depuis les années 1980, une méthode de K-théorie algébrique inventée par S. Bloch et reposant sur un théorème de Merkur′ev et Suslin a permis d'obtenir un certain nombre de résultats, en particulier pour les surfaces. On évoquera ces résultats au paragraphe 2.

En 2006, S. Saito et K. Sato [**35**] réalisèrent que pour obtenir des énoncés généraux il vaut mieux considérer non le groupe de Chow des zéro-cycles sur une variété projective et lisse X sur un corps p-adique k, mais le groupe de Chow des 1-cycles sur un modèle régulier et projectif de X au-dessus de l'anneau des entiers de k (lorsqu'un tel modèle existe).

On décrira en détail leur travail au paragraphe 3. Le théorème principal est le théorème 3.17. En voici deux applications (Théorèmes 3.21 et 3.25).

THÉORÈME 0.1. — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps p-adique k. Si X a bonne réduction Y sur le corps résiduel fini F, alors la flèche de spécialisation $A_0(X) \to A_0(Y)$, qui est une surjection sur le groupe fini $A_0(Y)$, a un noyau p'-divisible, c'est-à-dire divisible par tout entier premier à p.*

THÉORÈME 0.2. — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps p-adique k.*

(i) *Pour presque tout premier l, le quotient $A_0(X)/l$ est nul.*

(ii) *Pour tout premier $l \neq p$, le quotient $A_0(X)/l$ est fini* (1).

Les résultats de Saito et Sato [**35**] furent ensuite combinés par Asakura et Saito [**2**] à des techniques de théorie de Hodge pour établir l'existence de surfaces X de degré au moins 5 dans $\mathbf{P}^3_k$ dont les sous-groupes de torsion l-primaire ($l \neq p$) sont infinis (voir le paragraphe 4 ci-après).

Je remercie Tamás Szamuely pour de nombreuses discussions sur le théorème de Saito et Sato et pour ses commentaires critiques sur une première version du présent texte.

(1) Dans [**35**], l'énoncé (ii) est établi pour les k-variétés qui admettent un modèle quasi-semistable sur l'anneau des entiers ; comme on verra, le cas général s'y ramène grâce à un théorème récent de Gabber.

Notations

Soit A un groupe abélien. Pour $n > 0$ un entier, on note $A[n] \subset A$ le sous-groupe formé des éléments annulés par n. Pour l un nombre premier, on note $A\{l\} \subset A$ le sous-groupe de torsion l-primaire.

1. COURBES SUR LES CORPS p-ADIQUES : RÉSULTATS CLASSIQUES

Comme mentionné dans l'introduction, pour une courbe projective et lisse X sur un corps p-adique, on peut détecter les classes dans $CH_0(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ au moyen de la cohomologie étale. Expliquons plus précisément ce que nous entendons par là.

Théorème 1.1 (Tate (1958) [**43**]). — *Soient k un corps p-adique, A une variété abélienne sur k et $\hat{A}$ la variété abélienne duale. Il y a une dualité parfaite*

$$A(k) \times H^1(k, \hat{A}) \to \mathrm{Br}k = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

entre le groupe abélien compact $A(k)$ des points rationnels de A et le groupe discret défini par le premier groupe de cohomologie galoisienne de k à valeurs dans le groupe des points de $\hat{A}$.

En s'appuyant sur ce théorème, on montre :

Théorème 1.2 (Roquette (1966), Lichtenbaum (1969) [**29**])

Soient k un corps p-adique et X une k-courbe projective, lisse, géométriquement connexe.

a) *Il y a un accouplement naturel*

$$\mathrm{Pic}X \times \mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}k = \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

et cet accouplement est non dégénéré des deux côtés.

b) *Le noyau de la flèche $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \mathrm{Br}k \to \mathrm{Br}X$ induite par le morphisme structural est $\mathbf{Z}/I$, où I est l'index de X, c'est-à-dire le pgcd des degrés, sur k, des points fermés sur X.*

Ainsi, pour X une courbe projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k p-adique, possédant un k-point, le groupe $A_0(X)$ est isomorphe au groupe de Lie p-adique $J_X(k)$, et l'accouplement

$$CH_0(X) \times \mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}k = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est non dégénéré à gauche et à droite.