

352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

Mesures stationnaires sur les espaces homogènes

François LEDRAPPIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

MESURES STATIONNAIRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES [d'après Yves Benoist et Jean-François Quint]

par François LEDRAPPIER

INTRODUCTION

Les actions de sous-groupes fermés d'un groupe de Lie G sur les espaces homogènes de volume fini d'un groupe de Lie semi-simple apparaissent dans de nombreux contextes. L'action d'un réseau dans G sur les espaces homogènes d'autres groupes est au cœur de la preuve du théorème d'arithméticité de G. Margulis ([26]). Les fermés invariants par l'action d'un sous-groupe engendré par des éléments unipotents ont été classés par M. Ratner (voir [17]). Les fermés invariants par l'action d'un sous-tore d'un tore maximal ne sont pas compris en général, mais ont déjà apporté plusieurs informations (voir les comptes rendus de E. Breuillard [9] et E. Lindenstrauss [25]). Très souvent dans ces études, un rôle est joué par les mesures finies invariantes et des outils de théorie ergodique interviennent dans les techniques des démonstrations : théorème ergodique multiplicatif d'Osseledets dans les premières versions des théorèmes de rigidité, théorème ergodique de Birkhoff dans l'argument de dérive des flots unipotents, théorie de l'entropie pour les actions de tore.

Dans une série d'articles, Yves Benoist et Jean-François Quint ont considéré une situation nouvelle : par exemple, si G est un groupe simple et Γ un sous-groupe compactement engendré et Zariski dense, ils montrent que les orbites de l'action de Γ sur un espace homogène de volume fini G/Λ sont soit finies, soit denses. Pour aborder ce problème dans l'esprit précédent, une première difficulté est qu'il n'y a pas *a priori* de mesure invariante par l'action d'un tel sous-groupe Γ sur un fermé invariant : Γ n'est pas moyennable en général. En revanche, il y aura toujours des probabilités stationnaires pour un processus de Markoff défini par une marche aléatoire sur Γ . Un résultat central de Yves Benoist et Jean-François Quint ([3]) est de classer ces mesures stationnaires. Le point crucial de leur démonstration est, comme chez Ratner, un argument de dérive. Les outils techniques sont le théorème des martingales et des

théorèmes sur le comportement asymptotiques des marches aléatoires sur les groupes linéaires qui sont des extensions de résultats classiques d'Émile Le Page ([24]).

Les articles [1], [3], [2] et [5] sont très bien écrits et détaillés. Dans cet exposé, nous allons tenter d'en présenter les principales articulations.

1. RÉSULTAT PRINCIPAL

Soient G un groupe de Lie réel et Λ un réseau dans G , c'est-à-dire un sous-groupe discret de G tel que le quotient $X := G/\Lambda$ a un volume fini. Un élément γ de G agit (à gauche) sur G/Λ et agit donc sur les mesures de probabilité sur X : si ν est une mesure de probabilité sur X , on note $\gamma_*\nu$ la mesure image $\gamma_*\nu(A) = \nu(\gamma^{-1}A)$.

Soit μ une mesure de probabilité sur G de support Δ_μ compact. On note Γ_μ le groupe fermé engendré par Δ_μ . Une probabilité ν sur X est dite μ -stationnaire si on a $\int_G \gamma_*\nu d\mu(\gamma) = \nu$, autrement dit si pour toute fonction continue f à support compact sur X :

$$(1) \quad \int_{X \times G} f(\gamma x) d\nu(x) d\mu(\gamma) = \int_X f d\nu.$$

Une mesure de probabilité μ -stationnaire est dite ergodique si elle est extrémale parmi les mesures de probabilités μ -stationnaires.

D'autre part, une probabilité ν sur G/Λ est dite algébrique si elle est portée par une orbite fermée Fx de son stabilisateur $F := \{\gamma \in G; \gamma_*\nu = \nu\}$. Dans ce cas, si x est le point $g\Lambda$ pour un $g \in G$, $F \cap g\Lambda g^{-1}$ est un réseau de F et la mesure ν est l'image par l'application $\gamma \mapsto \gamma x$ de la mesure de probabilité invariante à gauche sur $F/(F \cap g\Lambda g^{-1})$.

Yves Benoist et Jean-François Quint ([3]) montrent :

THÉOREME 1.1 ([3], Theorem 1.1). — *Avec les notations ci-dessus, on suppose que $H_\mu = \overline{\text{Ad}(\Gamma_\mu)}^Z$ est un groupe semi-simple, Zariski connexe et sans facteur compact. Alors toute mesure de probabilité μ -stationnaire ergodique sur X est algébrique et Γ_μ -invariante.*

La démonstration de ce théorème, ou plutôt d'une version plus générale concernant les groupes de Lie S -adiques, où S est un ensemble fini de complétions de $\mathbb{Q}$, occupe [3] et [2]. Le but de cet exposé est d'en présenter les grandes lignes dans le cas réel. Comme les arguments sont de nature qualitative et probabiliste, on peut se convaincre qu'avec certaines précautions, ce schéma général peut aussi être suivi dans le cas p -adique. Dans le cas réel, le corollaire suivant est important

COROLLAIRE 1.2. — *Soient G un groupe algébrique réel semi-simple connexe sans facteur compact, Λ un réseau irréductible dans G et μ une mesure de probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous-groupe Zariski dense dans G . Alors la seule mesure de probabilité μ -stationnaire sans atomes sur X est la mesure de probabilité G -invariante.*

Ce résultat, dans le cas où G est simple, fut le premier obtenu par Yves Benoist et Jean-François Quint ([1]).

2. EXEMPLES ET APPLICATIONS

Dans un autre article ([5]), Yves Benoist et Jean-François Quint utilisent le théorème 1.1 pour classer les fermés de G/Λ invariants par l'action à gauche d'un sous-ensemble compact (par exemple fini) Δ d'éléments de G . L'idée générale est de choisir une mesure μ de probabilité quelconque de support Δ . Si $Y \subset X$ est une partie fermée Δ -invariante, Y va porter des mesures stationnaires (grâce à un théorème de point fixe pour l'opérateur $\nu \mapsto \int_G \gamma_* \nu d\mu(\gamma)$ qui préserve les probabilités sur Y). Ils obtiennent le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 ([5], Theorem 1.1). — *Soient G un groupe de Lie réel, Λ un réseau dans G et Γ un sous-semigroupe fermé de G , de génération compacte. On suppose que la fermeture de Zariski de $\text{Ad}(\Gamma)$ dans $GL(\mathfrak{g})$ est semisimple, Zariski connexe, sans facteur compact. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un sous-groupe fermé H tel que $\overline{\Gamma x} = Hx$ et Hx porte une mesure de probabilité invariante ν_x .*

En fait, la mesure ν_x apparaît naturellement lors de simulations de l'action de tirages aléatoires d'éléments de G avec la loi μ :

THÉORÈME 2.2 ([5], Theorem 1.3). — *Avec les mêmes notations, soit μ une probabilité sur Γ dont le support est compact et engendre un sous-semigroupe dense de Γ . Alors, pour tout $x \in X$, pour $\mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$ -presque tout choix d'éléments $\gamma_1, \gamma_2, \dots$,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\gamma_k \cdots \gamma_1 x} \rightarrow \nu_x \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Ces théorèmes ont aussi une version p -adique. Nous présentons deux exemples où ces résultats ont été établis auparavant.

Soit $X = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ et prenons pour G le groupe des transformations affines de X , $G = GL(d, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{T}^d$ et pour Λ le sous-groupe $GL(d, \mathbb{Z}) \ltimes \{0\}$. Soit Δ une famille finie de matrices de $GL(d, \mathbb{Z})$ qui engendrent $GL(d, \mathbb{Z})$. Comme X est compact, toute mesure de probabilité μ de support Δ admet des mesures stationnaires. D'après le

théorème 1.1, les mesures stationnaires ergodiques sont ou bien la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$, ou bien portées par l'orbite finie d'un point x rationnel (ceci est dû à [7] dans ce cas et remonte à Furstenberg [15] pour une famille particulière de mesures μ). Si x n'est pas rationnel, pour presque tout choix d'éléments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\gamma_k \dots \gamma_1 x} \rightarrow$ Lebesgue quand $n \rightarrow \infty$. En particulier, le seul fermé invariant infini est le tore $\mathbb{T}^d$ ([21], [27]). De plus, les orbites rationnelles finies de plus en plus longues deviennent finalement uniformément distribuées sur X .

Considérons $G = SL(2, \mathbb{R})$ et $\Gamma = \Lambda = SL(2, \mathbb{Z})$. Un point $x = g\Lambda$ de $X = G/\Lambda$ a une orbite finie si, et seulement si, g est tel que $\Lambda \cap g\Lambda g^{-1}$ est un sous-groupe d'indice fini dans Λ (on dit que g est un *commensurateur* de Λ). Si g n'est pas un commensurateur, μ une probabilité portée par un système générateur fini de Λ , pour $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$ -presque tout choix d'éléments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\gamma_k \dots \gamma_1 x}$ converge vers la mesure uniforme quand $n \rightarrow \infty$. Comme plus haut, les orbites finies des commensurateurs de plus en plus longues deviennent finalement uniformément distribuées sur X (voir [10] et [13] pour les résultats arithmétiques correspondants).

Dans les deux cas, les preuves de [7] ou de [10] reposent sur de l'analyse harmonique fine et donnent des vitesses de convergence exponentielles dans les résultats d'équidistribution. Les méthodes de Benoist et Quint ne donnent pas pour l'instant de vitesse de convergence, mais elles ont un champ d'application beaucoup plus large. Par exemple, pour n'importe quel ensemble fini Δ engendrant un sous-groupe Γ Zariski dense, les (Γ, μ) orbites de $x = g\Lambda$ sont encore équidistribuées sur G/Λ dès qu'elles ne sont pas finies. Un exemple naturel est le mouvement brownien discret⁽¹⁾ sur $PSL(2, \mathbb{R})/\Lambda$: l'espace X s'identifie au fibré unitaire de la surface $\mathbb{H}^2/\Lambda$. Si $x \in X$, on pivote sur place de façon équiprobable d'un nombre entier de quarts de tour et on suit le flot géodésique pendant un temps $\lambda > 0$. Les trajectoires sont les trajectoires du processus de Markoff associé à l'action des quatre matrices :

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda/2} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e^{\lambda/2} \\ -e^{-\lambda/2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{\lambda/2}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Soit Γ le groupe engendré par ces matrices. Il existe λ_0 pour lequel Γ est de covolume fini non cocompact. Alors :

- pour $\lambda > \lambda_0$, Γ est un groupe discret de covolume infini ;
- pour $\lambda < \lambda_0$, Γ est dense sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de λ où Γ est discret cocompact.

⁽¹⁾ Je remercie Pablo Lessa pour m'avoir signalé cet exemple introduit par J.-C. Gruet.