Séminaire BOURBAKI Octobre 2012
65e année, 2012-2013, n° 1060, p. 41 à 72

LES EXPOSANTS DE LIAPOUNOFF DU FLOT DE TEICHMÜLLER [d'après Eskin-Kontsevich-Zorich]

par **Julien GRIVAUX & Pascal HUBERT**

Dans ce texte, nous présentons un résultat dû à Eskin, Kontsevich et Zorich [EKZ2] concernant les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller.

1. INTRODUCTION

1.1. Surfaces de translation et 1-formes holomorphes

Nous allons en premier lieu fixer le cadre général (pour des textes introductifs, on renvoie le lecteur aux références suivantes : [MT], [Vi], [Yo1], [Yo2], [Zo4]). Une surface de translation compacte est la donnée d'une 1-forme holomorphe globale non nulle ω sur une surface de Riemann compacte X [1]. Géométriquement, une telle surface se représente comme un polygone dans le plan complexe dont on a identifié par translation des côtés parallèles et de même longueur. La 1-forme ω sur X est induite par dz, et ses zéros sont certains sommets du polygone. De plus, X est munie d'une métrique plate héritée de la métrique plate naturelle du polygone, avec des singularités coniques sur le lieu d'annulation de ω. De manière précise, un zéro d'ordre k correspond à un point conique d'angle $2(k+1)\pi$.

L'aire de X pour la métrique plate est l'aire euclidienne d'un polygone associé, et on a

$$\mathrm{Aire}(X) = \frac{i}{2}\int_X \omega \wedge \overline{\omega}.$$

Enfin le genre g de X est déterminé par la donnée combinatoire $(k_1, \ldots, k_r)$ de (X, ω), qui est la liste des ordres de multiplicités des zéros de ω, *via* la formule

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = 2g - 2.$$

1. Eskin-Kontsevich-Zorich traitent aussi le cas des formes différentielles quadratiques qui est analogue, mais nous nous limiterons aux formes holomorphes pour simplifier l'exposition.

L'exemple de base de surface de translation est le tore plat qui est évidemment une surface de translation sans singularité [2], le polygone associé étant un parallélogramme dont les côtés opposés sont identifiés.

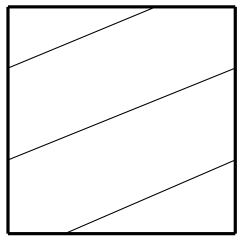

FIGURE 1. Tore plat et flot linéaire.

Pour tout angle θ, le flot linéaire de direction θ est bien défini sur X, et ses propriétés dynamiques sont d'un grand intérêt.

1.2. Espace des modules des 1-formes holomorphes

Un genre g étant fixé, l'espace des modules des 1-formes holomorphes est l'ensemble des surfaces de translation compactes (X, ω) de genre g modulo l'action naturelle des difféomorphismes. Cet espace de modules est naturellement stratifié par les données combinatoires. Pour toute donnée combinatoire $(k_1, \ldots, k_r)$ nous noterons $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_r)$ la strate correspondante. On peut montrer que $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_r)$ est une orbifolde complexe de dimension $2g + r - 1$ localement modelée sur le groupe de cohomologie relative $\mathrm{H}^1(X, \Sigma, \mathbb{C})$, où Σ est le lieu d'annulation de ω.

On rappelle brièvement la construction de coordonnées locales orbifoldes sur $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_r)$. Fixons une base symplectique $(A_i, B_i)_{i=1,\ldots,g}$ de $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z})$, et soient $(C_i)_{i=1,\ldots,r-1}$ des chemins reliant un zéro fixé de ω à tous les autres. Les coordonnées locales sont les périodes de ω le long de ces chemins, c'est-à-dire les intégrales

$$\int_{A_1} \omega, \ldots, \int_{A_g} \omega, \int_{B_1} \omega, \ldots, \int_{B_g} \omega, \int_{C_1} \omega, \ldots, \int_{C_{r-1}} \omega.$$

Les changements de cartes correspondent à un changement de base symplectique et sont donc linéaires, ce qui entraîne que chaque strate $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_r)$ admet une structure affine. De manière plus précise, dans les coordonnées ci-dessus, une matrice de changement de base est de la forme

$$\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & I_{r-1} \end{pmatrix}$$

2. Pour être cohérent avec le reste de la théorie, l'origine du tore est tout de même un point marqué.

où U est dans $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ et V est dans $\mathrm{M}_{2g\times(r-1)}(\mathbb{Z})$. Une telle matrice est évidemment dans $\mathrm{SL}_{2g+r-1}(\mathbb{Z})$. Par conséquent, la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^{2g+r-1}$ est bien définie globalement sur la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$. Le réseau entier $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^{2g+r-1} = H^1(X, \Sigma, \mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ est invariant par changement de cartes ; ce réseau nous fournit une normalisation *naturelle* pour la mesure de Lebesgue : on demande que son covolume soit 1.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ agit de façon naturelle sur $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$. Cette action correspond à l'action linéaire sur les polygones, qui est bien définie au niveau des surfaces de translation et préserve la donnée combinatoire. Dans les coordonnées des périodes introduites dans la section précédente, l'action de toute matrice M de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est diagonale :

$$
\begin{aligned}
M\cdot\left(\int_{A_1}\omega, \dots, \int_{A_g}\omega, \int_{B_1}\omega, \dots, \int_{B_g}\omega, \int_{C_1}\omega, \dots, \int_{C_{r-1}}\omega\right)& \\
= \left(M\cdot\int_{A_1}\omega, \dots, M\cdot\int_{A_g}\omega, M\cdot\int_{B_1}\omega, \dots, M\cdot\int_{B_g}\omega, M\cdot\int_{C_1}\omega, \dots, M\cdot\int_{C_{r-1}}\omega\right)&.
\end{aligned}
$$

Cette action est $\mathbb{R}$–linéaire dans chaque coordonnée complexe (vue comme coordonnée à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ permet de feuilleter les strates par les orbites, ce feuilletage sera particulièrement important dans la suite. Il est évident par la formule précédente que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ préserve la mesure de Lebesgue de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$, ainsi que l'aire des surfaces de translation. Notons $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ la sous-variété de codimension réelle un formée des surfaces de translation d'aire 1 et de donnée combinatoire $(k_1, \dots, k_r)$. La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ induit une mesure ν sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$. Dans les coordonnées des périodes, la mesure d'un ensemble de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ est celle du cône de sommet l'origine bordé par cet ensemble à un facteur dimensionnel près.

Un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ joue un rôle fondamental dans toute la suite, c'est le groupe des matrices diagonales

$$
\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.
$$

Le flot associé est le flot de Teichmüller, qui est le flot géodésique pour la métrique de Teichmüller. Un des premiers théorèmes importants concernant ce flot est dû indépendamment à Masur et Veech en 1982 :

Théorème 1 ([Ma1], [Ve1]). — *La mesure de Lebesgue ν sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ est finie. De plus, le flot géodésique de Teichmüller est ergodique sur chaque composante connexe de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$.*

Les composantes connexes de $\mathcal{H}_1(k_1, \ldots, k_r)$ ont été classifiées par Kontsevich et Zorich dans [KZ2], il y en a au plus 3. Dans le cas des différentielles quadratiques, elles ont été classifiées par Lanneau [La].

Remarque 2. — *Dans toute la suite, nous parlerons de strate là où il faudrait parler en toute rigueur de composante connexe de strate, ceci pour ne pas alourdir le texte. La mesure ν dépend de la composante connexe considérée : c'est son support.*

1.3. Fibré de Hodge et cocycle de Kontsevich-Zorich

Étant donnée une surface de Riemann X de genre g, rappelons la définition de la norme de Hodge sur l'espace $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{R})$. La décomposition de Hodge s'écrit

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{1,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,1}(X)$$

où $\mathrm{H}^{1,0}(X)$ est l'espace vectoriel de dimension g des 1-formes holomorphes sur X et $\mathrm{H}^{0,1}(X)$ l'espace vectoriel des 1-formes anti-holomorphes. La forme d'intersection sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ donnée par

$$\iota(\omega_1, \omega_2) = \frac{i}{2} \int_X \omega_1 \wedge \overline{\omega}_2$$

est définie positive sur le sous-espace $\mathrm{H}^{1,0}(X)$ et définie négative sur le sous-espace conjugué $\mathrm{H}^{0,1}(X)$. Notons $\phi\colon \mathrm{H}^{1,0}(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{R})$ l'isomorphisme qui à toute forme holomorphe associe la classe de sa partie réelle. C'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$–espaces vectoriels qui permet de munir $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{R})$ de la norme de Hodge : si α est dans $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{R})$, on pose

$$\|\alpha\|^2_{\mathrm{Hodge}} = \iota\big(\phi^{-1}(\alpha), \phi^{-1}(\alpha)\big).$$

On considère maintenant le fibré de Hodge réel au-dessus d'une strate $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_r)$ dont la fibre au-dessus de chaque point (X, ω) est $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{R})$. Ce fibré de Hodge provient d'un système local de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, ce qui permet d'identifier localement les fibres voisines entre elles. L'identification se fait grâce à la connexion plate sur le fibré de Hodge associée à ce système local, appelée connexion de Gauß-Manin. Une grande partie de la géométrie du problème est contenue dans le fait que le fibré de Hodge complexe de fibre $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ est un fibré plat, mais que le sous-fibré de fibre $\mathrm{H}^{1,0}(X)$ qui tient compte de la structure complexe de X ne respecte pas cette structure plate (c'est-à-dire n'est pas invariant par la connexion de Gauß-Manin).

Étant donnée une surface de translation X et une classe de cohomologie α dans $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{R})$, on souhaite comprendre la croissance de la norme de Hodge $||\alpha_t||_{g_t X}$ quand t tend vers l'infini, où g_t est le flot de Teichmüller et α_t est la classe transportée parallèlement le long du flot à partir de α.

La monodromie de la connexion de Gauß-Manin définit un cocycle : en tout point X de la strate, on dispose d'une représentation du groupe fondamental de la composante connexe de X dans $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{R})$ qui est bien définie à conjugaison près. Par le théorème d'Ehresmann, l'action d'un élément du groupe fondamental est celle d'un difféomorphisme orienté sur l'homologie ; c'est donc une matrice symplectique car tout difféomorphisme orienté préserve la forme d'intersection.

Expliquons intuitivement comment obtenir ce cocycle de façon concrète le long des géodésiques du flot de Teichmüller. On fixe un petit ouvert U de la strate dans lequel on peut identifier de manière canonique les espaces de cohomologie $\mathrm{H}^1(Y,\mathbb{R})$ entre eux lorsque Y parcourt U. Soient X un point de U et α une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{R})$. On suit par transport parallèle la classe α sous l'action du flot de Teichmüller g_t jusqu'à revenir dans U (ce qui se produit en temps fini pour presque tout X car le flot est ergodique). La classe α_t obtenue dans $\mathrm{H}^1(g_tX,\mathbb{R})$ s'identifie de manière canonique à une classe dans $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{R})$ qui est précisément l'action du cocycle de Kontsevich-Zorich G_t^{KZ} sur la classe α.

1.4. Exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller

Comme le flot de Teichmüller est ergodique, on peut appliquer le théorème d'Oseledets au cocycle de Kontsevich-Zorich. Il existe donc des nombres réels $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$ et une décomposition

$$\mathrm{H}^1(X,\mathbb{R}) = E_1(\omega) \oplus \cdots \oplus E_k(\omega)$$

dépendant mesurablement de (X,ω) telle que, si α est dans $E_i(\omega)$, on a

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \| G_t^{\mathrm{KZ}}(\alpha) \| = \lambda_i.$$

Il est plus aisé pour la suite de considérer $2g$ exposants de Liapounoff $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2g}$, chaque exposant étant répété avec une multiplicité correspondant à la dimension de l'espace d'Oseledets associé. Comme le cocycle est symplectique, ces exposants vérifient la relation de symétrie $\lambda_{2g-i+1} = -\lambda_i$. De plus, on montre que $\lambda_1 = 1$ de la manière suivante : le sous-fibré de rang 2 du fibré de Hodge dont la fibre en tout point (X,ω) est le plan réel engendré par $\mathrm{Re}\,\omega$ et $\mathrm{Im}\,\omega$ est stable par le flot de Teichmüller. Le cocycle de Kontsevich-Zorich restreint à ce plan n'est autre que l'action linéaire donnée par le flot géodésique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, et les exposants de Liapounoff associés sont 1 et -1. Ces exposants sont extrémaux d'après le théorème de Teichmüller.

Les valeurs des autres exposants sont dans la plupart des cas totalement inconnues. Forni [Fo] a prouvé que λ_g est strictement positif et Avila-Viana [AV] que tous les exposants sont distincts. Ces résultats difficiles sont vrais uniquement dans le cas des strates et pour la mesure ν.

À la suite d'expériences numériques obtenues par l'algorithme de Rauzy-Veech (qui permet de discrétiser le flot de Teichmüller), Kontsevich et Zorich ([Ko], [KZ1]) ont conjecturé vers le milieu des années 90 que la somme des exposants positifs $\lambda_1 + \cdots + \lambda_g$ est un nombre rationnel, ce qui est remarquable et *a priori* très surprenant vu la définition des exposants. L'article d'Eskin-Kontsevich-Zorich donne une formule explicite