BULLETIN DE LA S. M. F.

DOMINIQUE HULIN

Sous-variétés complexes d'Einstein de l'espace projectif

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 2 (1996), p. 277-298
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_2_277_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 277–298.

SOUS-VARIÉTÉS COMPLEXES D'EINSTEIN DE L'ESPACE PROJECTIF

PAR

DOMINIQUE HULIN (*)

RÉSUMÉ. — On montre qu'un germe de sous-variété complexe $M \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^N, \mathrm{can})$ qui est d'Einstein pour la métrique induite s'étend en une sous-variété complexe complète de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. On en déduit en particulier que la constante d'Einstein de M est rationnelle.

ABSTRACT. — We prove that any complex submanifold M of the complex projective space $(\mathbb{C}\mathrm{P}^N, \mathrm{can})$, which is Einstein for the induced metric, extends to a complete complex submanifold of $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$. In particular, the Einstein constant of M is a rational number.

0. Introduction

On s'intéresse ici aux sous-variétés riemanniennes complexes V^n (où n est ≥ 2) de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ qui sont d'Einstein pour la métrique induite ($\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ sera muni de la métrique de Fubini-Study à courbure sectionnelle holomorphe constante 4). Les exemples connus jusqu'ici sont tous des espaces homogènes complexes. Ces exemples homogènes complexes, ainsi que leurs réalisations isométriques dans les espaces projectifs, sont classés dans [Se], ou [Ta] : ce sont des variétés drapeaux (donc à première classe de Chern positive), et les immersions sont fournies par les plongements plurianticanoniques.

À ce jour on ne dispose cependant, pour les sous-variétés Kähler-Einstein de l'espace projectif, que des résultats de classification partiels suivants. Brian Smyth [S] a d'abord décrit les hypersurfaces complètes et simplement connexes. Son résultat a ensuite été étendu par S.S. Chern [Ch]

(*) Texte reçu le 28 décembre 1994, révisé le 27 juillet 1995.

D. HULIN, Centre de Mathématiques, URA CNRS 169, École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX (France).
Email : hulin@orphee.polytechnique.fr.

Classification AMS : 53C25, 53C55.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1996/277/$ 5.00

aux hypersurfaces ouvertes, par Y. Matsuyama [Ma] puis K. Tsukada [Ts] en codimension 2, et par J. Hano [Ha] aux sous-variétés qui sont des intersections complètes.

Nous montrons dans cet article qu'un germe de sous-variété complexe de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ qui est d'Einstein pour la métrique induite est germe d'une variété kählérienne analytique complète. Le résultat principal est le :

THÉORÈME. — *Une sous-variété riemannienne complexe d'Einstein* $V^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ (*avec* $n \geq 2$) *se réalise comme ouvert d'une* (*unique*) *variété kählérienne analytique complète* M^n, *immergée isométriquement sans points doubles dans* $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ (*en tant que sous-variété complexe*). *De plus la constante d'Einstein est rationnelle. Si cette constante est non négative,* M *est compacte.*

Nos résultats sont obtenus en utilisant la notion de diastase introduite par E. Calabi pour étudier le problème de l'immersion isométrique complexe (locale ou globale) des variétés kählériennes dans les espaces à courbure sectionnelle holomorphe constante $\mathbb{C}\mathrm{P}^N_\pm$ et $\mathbb{C}^N$ (voir [Ca]). Signalons que M. Umehara avait également utilisé la diastase pour montrer que les sous-variétés complexes d'Einstein de $\mathbb{C}\mathrm{P}^N_-$ et de $\mathbb{C}^N$ sont totalement géodésiques (voir [U]).

La définition de la diastase, et les principaux résultats de [Ca] sont brièvement rappelés dans le paragraphe 1. En 2, on introduit les coordonnées de Bochner [Bo]. On décrit en 3 l'application de Gauss d'une sous-variété complexe de l'espace projectif. Le théorème principal est démontré dans les paragraphes 4 à 6. On montre alors en 7 que les constantes d'Einstein positives réalisées par des sous-variétés de dimension n fixée forment un sous-ensemble discret de $]0, n+1]$. Enfin, on donne en 8 une courte preuve du résultat de classification en codimension 2 évoqué cidessus.

1. Immersions isométriques de variétés complexes

Le matériel présenté dans cette section est tiré de [Ca]. On renvoie à cet article pour plus de détails, et d'autres résultats.

Soient (V, g) une variété kählérienne analytique et ω sa forme de Kähler. Au voisinage de tout point $p \in V$, il existe un potentiel de Kähler pour g, *i.e.* une fonction réelle analytique Φ, à valeurs réelles, pour laquelle $\omega = \frac{1}{2} i\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\Phi$. Dans tout système de coordonnées complexes (z) autour de p, on aura :

$$g_{\alpha\bar\beta} := 2g\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta}\Big) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta}.$$

Le potentiel Φ est déterminé à $\phi(z) + \overline{\phi(z)}$ près, où ϕ est holomorphe au voisinage de p. En découplant les variables z et $\bar{z}$, on peut étendre Φ en une fonction analytique complexe $\widehat{\Phi}$ définie sur un voisinage U de la diagonale autour de $(p, \bar{p})$ dans $V \times \overline{V}$ (on a noté $\overline{V}$ la variété conjuguée de V).

PROPOSITION-DÉFINITION 1.1. — *Pour tout $p \in V$, il existe un unique potentiel D_p autour de p (la* diastase *de V en p), pour lequel*

$$\widehat{D}_p(q_1, \bar{q}_2) = \mathcal{O}(|p - q_1|)\mathcal{O}(|\bar{p} - \bar{q}_2|).$$

Si Φ est un potentiel quelconque autour de p, on obtient D_p par

$$D_p(q) = \widehat{\Phi}(q, \bar{q}) + \widehat{\Phi}(p, \bar{p}) - \widehat{\Phi}(p, \bar{q}) - \widehat{\Phi}(q, \bar{p}).$$

Parmi les potentiels, la diastase est caractérisée par le fait que, dans tout système de coordonnées complexes (z) centré en p,

$$D_p(z, \bar{z}) = \sum_{i,j} a_{i,j} z^i \bar{z}^j,$$

avec $a_{i,0} = a_{0,i} = 0$ pour tout multiindice i.

C'est la remarque suivante qui fait l'intérêt de la diastase dans les problèmes d'immersions isométriques complexes.

PROPOSITION 1.2. — *La diastase en $p \in W$ d'une sous-variété complexe $W \subset V$ est obtenue par restriction à W de celle de la variété ambiante V.*

EXEMPLES 1.3.

(i) La diastase dans $\mathbb{C}^N$ est le carré de la distance géodésique :

$$D_p(q) = |p - q|^2.$$

(ii) La diastase de $\mathbb{C}\mathrm{P}_b^N$, l'espace projectif complexe à courbure sectionnelle holomorphe constante $4b$ est donnée dans de « bonnes » coordonnées (voir § 2) par

$$D(z) = \frac{1}{b} \log\bigl(1 + b|z|^2\bigr) \qquad (b \neq 0).$$

(iii) La diastase de la quadrique $\mathcal{Q}^N$ d'équation homogène

$$Z_0^2 + \cdots + Z_{N+1}^2 = 0$$

dans $\mathbb{C}P^{N+1}$ s'écrit dans un système de coordonnées idoine :

$$D(z) = \log\Big(1 + |z|^2 + \tfrac{1}{4}\Big|\sum_{\alpha=1}^{N} z_\alpha^2\Big|^2\Big).$$

D'après 1.2 et 1.3, lorsqu'un plongement isométrique complexe

$$h : V \hookrightarrow \mathbb{C}^N$$

est donné au voisinage de $p \in V$ par $h = (h_1, \dots, h_N)$ avec $h(p) = 0$, on a :

$$D_p(q) = \sum_{\sigma=1}^{N} \big|h_\sigma(q)\big|^2. \tag{1.4}$$

Ceci suggère la définition suivante (équivalente à celle de [Ca]).

DÉFINITION 1.5. — Une variété kählérienne analytique V est dite *résoluble de rang* (au plus) N en $p \in V$ si, formellement, on a :

$$D_p(q) = \sum_{\sigma=1}^{N} \big|h_\sigma(q)\big|^2,$$

où les h_σ sont des séries formelles en q.

Nous pouvons maintenant énoncer le critère de Calabi.

THÉORÈME 1.6 (voir [Ca, §§ 3.3 et 3.4]). — *Soit V une variété kählérienne analytique.*

(i) *Si V est résoluble de rang N en un point p, elle l'est en tout autre point.*

(ii) *La variété V peut être localement plongée dans $\mathbb{C}^N$ au voisinage de p si et seulement si V est résoluble de rang N en p.*

Esquisse de preuve.

Partie (i) : c'est une conséquence de (ii).

Partie (ii) : la condition est nécessaire (1.4). Lorsqu'elle est satisfaite, on peut assurer la convergence des séries formelles h_σ sur le domaine de convergence de la série associée à D_p ; l'application $(h_1, \dots, h_N)$ fournit alors le plongement isométrique cherché. $\square$

Ce critère est assorti d'un résultat de rigidité locale.