

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

VARIÉTÉS HOROSPHÉRIQUES DE FANO

Boris Pasquier

**Tome 136
Fascicule 2**

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 195-225

VARIÉTÉS HOROSPHERIQUES DE FANO

PAR BORIS PASQUIER

RÉSUMÉ. — Une variété horosphérique est une variété algébrique normale dans laquelle un groupe algébrique réductif opère avec une orbite ouverte fibrée en tores sur une variété de drapeaux. En particulier, les variétés toriques et les variétés de drapeaux sont horosphériques. Dans cet article, on classe les variétés horosphériques de Fano en termes de certains polyèdres rationnels qui généralisent les polyèdres réflexifs considérés par V. Batyrev. Puis on obtient une majoration du degré des variétés horosphériques lisses de Fano, analogue à celle donnée par O. Debarre dans le cas torique. On étend un résultat récent de C. Casagrande: les variétés horosphériques $\mathbb{Q}$ -factorielles de Fano ont leur nombre de Picard majoré par deux fois la dimension.

ABSTRACT (*Fano horospherical varieties*). — A horospherical variety is a normal algebraic variety where a reductive algebraic group acts with an open orbit which is a torus bundle over a flag variety. For example, toric varieties and flag varieties are horospherical. In this paper, we classify Fano horospherical varieties in terms of certain rational polytopes that generalize the reflexive polytopes considered by V. Batyrev. Then, we obtain an upper bound on the degree of smooth Fano horospherical varieties, analogous to that given by O. Debarre in the toric case. We extend a recent result of C. Casagrande: the Picard number of any Fano $\mathbb{Q}$ -factorial horospherical variety is bounded by twice the dimension.

Texte reçu le 6 novembre 2006, révisé le 20 mars 2007, accepté le 4 mai 2007

BORIS PASQUIER, UMR5582, Institut Fourier, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères • *E-mail* : Boris.Pasquier@ujf-grenoble.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14I45, 14L30, 14M17, 52B20.

Mots clefs. — Variété de Fano, variété horosphérique, polyèdre rationnel, degré, nombre de Picard.

1. Introduction

Une variété complexe projective X est dite de Fano si elle est normale et si son diviseur anticanonique $-K_X$ est de Cartier et ample. On sait qu'il n'y a qu'un nombre fini de familles de variétés lisses, de Fano et de dimension donnée. Cependant ces familles sont seulement connues jusqu'en dimension 3.

Les variétés toriques donnent beaucoup d'exemples de variétés de Fano. Plus précisément, V. Batyrev a classifié les variétés toriques de Fano de dimension d en termes des polytopes réflexifs de dimension d [3] : ce sont les polytopes convexes de $\mathbb{R}^d$ à sommets dans $\mathbb{Z}^d$ contenant 0 dans leur intérieur et tels que leur polytope dual vérifie les mêmes hypothèses.

De plus, certaines propriétés ou certains invariants géométriques des variétés toriques de Fano, comme la lissité, le nombre de Picard ou le degré, se lisent facilement sur le polytope réflexif associé. Cela a permis à O. Debarre de majorer le degré $(-K_X)^d$ des variétés toriques lisses de Fano en fonction de la dimension d et du nombre de Picard [12]. D'autre part, C. Casagrande a récemment donné une majoration optimale du nombre de Picard des variétés toriques $\mathbb{Q}$ -factorielles et de Fano en fonction de la dimension [9].

Cet article a pour but de généraliser tous ces résultats aux variétés horosphériques. Soit G un groupe algébrique réductif connexe. Un G -espace homogène est dit horosphérique de rang n si c'est un fibré en tores $(\mathbb{C}^*)^n$ sur une variété de drapeaux.

Une variété horosphérique est un plongement d'un espace homogène horosphérique G/H , c'est-à-dire une G -variété normale contenant une orbite ouverte isomorphe à G/H ; son rang est celui de G/H . Parmi les variétés horosphériques, on compte les variétés toriques (lorsque G/H est un tore) et les variétés de drapeaux. Ces dernières sont lisses et de Fano.

Les variétés horosphériques font partie de la famille des variétés sphériques. Les plongements d'un espace homogène sphérique G/H fixé ont été classifiés en termes d'éventails coloriés par D. Luna et T. Vust [19]. Lorsque G/H est horosphérique de rang n , on montre que les plongements de Fano de G/H sont classifiés en termes de certains polytopes rationnels, dits G/H -réflexifs (voir la définition 3.3). Ces polytopes sont de dimension n (tout comme les éventails coloriés). Il est important de remarquer que la dimension de G/H est plus grande que n , avec égalité si et seulement si G/H est un tore ; dans ce dernier cas, les polytopes G/H -réflexifs sont les polytopes réflexifs définis par V. Batyrev. A rang égal, les polytopes G/H -réflexifs peuvent être beaucoup plus nombreux que les polytopes réflexifs [22, ch.6].

V. Alexeev et M. Brion ont montré que l'ensemble des classes d'isomorphisme des variétés sphériques de Fano de dimension fixée est fini [1]. On verra que la classification précédente permet d'avoir une version effective de ce

résultat pour les variétés horosphériques de Fano dont l'orbite ouverte est fixée.

Dans la partie 2, on présente la classification de Luna et Vust dans le cas d'un espace homogène horosphérique G/H .

Dans la partie 3, on classe les plongements de Fano de G/H en termes de polytopes G/H -réflexifs, et on donne une borne explicite du nombre de classes d'isomorphisme de plongements de Fano de G/H .

Grâce à cette classification, on démontre les résultats suivants, dans la partie 4.

THÉORÈME 1.1. — *Soit X une variété horosphérique de Fano, localement factorielle, de dimension d , de rang n et de nombre de Picard ρ .*

Si $\rho > 1$ alors

$$(-K_X)^d \leq d! d^{d\rho+n}.$$

Si $\rho = 1$, on a

$$(-K_X)^d \leq d! (d+1)^{d+n}.$$

Une variété lisse est localement factorielle. La réciproque est vraie pour les variétés toriques mais elle est fausse pour les variétés horosphériques (un critère de lissité est donné pour les variétés horosphériques dans [22, th. 2.6] ou [25, th. 28.3]).

THÉORÈME 1.2. — *Soit X une variété horosphérique de Fano, $\mathbb{Q}$ -factorielle, de dimension d , de rang n et de nombre de Picard ρ . On a*

$$\rho \leq n + d \leq 2d$$

avec $\rho = 2d$ si et seulement si d est pair et $X = (S_3)^{d/2}$ où S_3 est l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en trois points non alignés.

Les preuves de ces deux résultats sont inspirées de celles des résultats analogues dans le cas torique ([12], [9]). Il faut prendre en compte le fait que les polytopes G/H -réflexifs ne sont pas à sommets entiers comme dans le cas torique. Cependant, les sommets non entiers sont parmi un nombre fini de points rationnels qui dépendent seulement de G/H , ce qui permet de contrôler les changements qui apparaissent entre les cas torique et horosphérique. On utilisera alors des arguments de géométrie convexe ainsi que des éléments de combinatoire sur les groupes algébriques réductifs.

On remarquera que les variétés de nombre de Picard 1 sont souvent étudiées à part : quelles sont ces variétés ? Les seules variétés toriques lisses et de nombre de Picard 1 sont les espaces projectifs. Par contre, parmi les variétés horosphériques lisses de nombre de Picard 1, on compte les variétés de drapeaux G/P avec P maximal, mais aussi des variétés non homogènes [23].

Une question naturelle se pose : est-ce que ces deux théorèmes peuvent se généraliser aux variétés sphériques ?

On sait que toute variété sphérique de Fano X dégénère en une variété horosphérique (ou même torique) X_0 qui est projective et $\mathbb{Q}$ -Fano, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif k tel que $-kK_{X_0}$ est de Cartier et ample [2]. Mais l'entier k peut être très grand, et la variété X_0 est en général très singulière. Ainsi tous ces résultats ne sont qu'une première étape dans la classification des variétés sphériques de Fano.

Cet article est une partie de ma thèse [22]. On y trouve notamment, dans les chapitres 6 et 7, des exemples de polytopes G/H -réflexifs et une description de certaines variétés horosphériques de rang 2, lisses et de Fano.

2. Notations

Toutes les variétés considérées sont des variétés algébriques sur $\mathbb{C}$.

On se donne un groupe algébrique G réductif (c'est-à-dire qui ne contient aucun sous-groupe distingué isomorphe à $\mathbb{C}^n$) et connexe sur $\mathbb{C}$, un sous-groupe de Borel B de G , un tore maximal T de B et le radical unipotent U de B . On note R l'ensemble des racines de (G, T) , R^+ l'ensemble des racines positives (c'est-à-dire l'ensemble des racines de (B, T)), S l'ensemble des racines simples, Λ (respectivement Λ^+) le groupe des caractères de B ou de T (respectivement l'ensemble des caractères dominants) et W le groupe de Weyl de (G, T) . Pour toute racine simple α , on note $\check{\alpha}$ sa coracine et ω_α le poids fondamental associé à α .

Pour tout sous-groupe fermé H de G , $N_G(H)$ désigne le normalisateur de H dans G , et $R_u(H)$ est le radical unipotent de H .

Lorsque $I \subset S$, on note W_I le sous-groupe de W engendré par les réflexions simples s_α pour tout $\alpha \in I$, et de même R_I (respectivement R_I^+) désigne l'ensemble des racines (respectivement positives) qui sont combinaisons linéaires des racines simples de I . On note P_I le sous-groupe parabolique de G engendré par B et W_I . Alors $I \mapsto P_I$ est une bijection entre l'ensemble des parties de S et l'ensemble des sous-groupes paraboliques contenant B [24, th. 8.4.3].

Pour tout caractère dominant λ , on note $V(\lambda)$ le G -module simple de plus grand poids λ [16, ch.XI]. On désigne par v_λ un vecteur propre de $V(\lambda)$ de poids λ , et le stabilisateur de la droite $\mathbb{C}v_\lambda$ est un sous-groupe parabolique de G contenant B qu'on note $P(\lambda)$. En écrivant $\lambda = \sum_{\alpha \in S} x_\alpha \omega_\alpha$, les x_α étant des entiers positifs ou nuls, on a $P(\lambda) = P_I$ où I est l'ensemble des racines simples α telles que x_α soit nul.