PANORAMAS ET SYNTHÈSES 19

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS INVOLUTIFS

Bernard Malgrange

Société Mathématique de France 2005
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique et du Ministère de la Culture et de la Communication

B. Malgrange
Institut Fourier, Université de Grenoble I, UMR 5582 CNRS, BP 74,
38402 St Martin d'Hères Cedex.

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 35N10, 12H05, 58A15.

***Mots clefs*. —** Complexe de Koszul, involutivité, idéal différentiel, D-variété.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS INVOLUTIFS

Bernard Malgrange

Résumé. **—** La première partie est une exposition de la théorie des « systèmes en involution » d'É. Cartan, du point de vue homologique de Spencer, Sternberg *et al.* Le point de vue de Cartan lui-même est aussi rappelé, et comparé au précédent, à l'appendice B. La seconde partie démontre l'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques, ce qui est une version précise d'une assertion de Cartan suivant laquelle, *grosso modo*, « en prolongeant un système différentiel, on finit par obtenir un système en involution ».

Abstract **(Involutive differential systems). —** The first part is an exposition of the theory of "systèmes en involution" of É. Cartan, from the homological point of view of Spencer, Sternberg *et al.* The point of view of Cartan himself is also recalled, and compared to the preceding one, in Appendix B. The second part proves the generic involutiveness of analytic differential systems, which is a precise version of an assertion of Cartan saying roughly that, "by prolongation, a differential system becomes eventually involutive".

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

I. Modules gradués, involutivité 7
1. Complexe de Koszul 7
2. Cas des modules gradués 9
3. Critères effectifs d'involutivité 12
4. Forme normale d'un module involutif 15
5. Syzygies 19
6. Variante 22

II. Systèmes différentiels : théorie formelle 27
1. Notion de système différentiel 27
2. Module caractéristique 29
3. Prolongement des solutions formelles 31
4. Prolongement des solutions formelles (suite) 35

III. Le théorème de Cartan-Kähler 41
1. Normes formelles 41
2. Majoration préliminaire 42
3. Le théorème de Cartan-Kähler 45
4. Réduction à l'ordre un 47
5. Forme normale d'un système involutif 49

IV. D-variétés 53
1. Variétés affines 53
2. D-variétés 55
3. Module et variété caractéristique 59
4. Involutivité générique 60

V. Involutivité générique (suite) 67
1. Préliminaires 67
2. Énoncés 68
3. Le cas des idéaux premiers 70
4. Le cas général : première démonstration 72
5. Le cas général : deuxième démonstration 74
6. Variante 76

A. Variétés affines 79
1. Cohérence 79
2. De l'affine au projectif 79
3. Ensembles analytiques stricts 82
4. Ensembles constructibles et constructibles stricts 84

B. Involutivité à la Cartan 87
1. Systèmes différentiels « intrinsèques » 87
2. Systèmes différentiels extérieurs 91
3. Comparaison 94
4. Compléments 97

Bibliographie 101

INTRODUCTION

Ce travail est la rédaction, annoncée depuis longtemps, d'un exposé systématique sur « l'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques ». Voici quelques explications.

La théorie des systèmes différentiels en involution a été créée par É. Cartan dans une série d'articles autour de 1900 ; voir notamment [**Ca1**]. Son but est d'obtenir un théorème d'existence tout à fait général pour un système d'équations aux dérivées partielles analytique ; le système est *a priori* quelconque, par exemple surdéterminé, ou même sous-surdéterminé (par rapport à la situation classique du théorème de Cauchy-Kovalevski, on a « trop » d'équations pour certaines fonctions inconnues, et « pas assez » pour d'autres). Cartan exprime sa condition en termes de systèmes différentiels extérieurs ; il appelle « systèmes en involution » ceux qui la vérifient. Ces conditions ont été étendues ultérieurement par Kähler [**Kah**], pour donner finalement ce qu'on appelle maintenant « le théorème de Cartan-Kähler ». Cartan et, à sa suite, de nombreux géomètres différentiels ont utilisé ce théorème dans divers problèmes, au premier rang desquels il faut citer le « problème d'équivalence » des structures différentielles ; pour ce dernier problème, je renvoie notamment à [**Gar, Mo1**] et [**Ol**].

Cependant, la signification algébrique de la notion d'involutivité est restée longtemps assez mystérieuse, malgré des travaux importants de Janet [**Ja1, Ja2**] et Matsushima [**Mat1, Mat2**]. Dans le même ordre d'idée, je signale aussi les premiers travaux de Kuranishi [**Ku1, Ku2**], dont je reparlerai plus loin. La situation change, après l'introduction par Spencer de méthodes cohomologiques dans les équations aux dérivées partielles ; cf. [**Spe1, Spe2**]. Il faut ici citer notamment les articles de Guillemin-Sternberg [**G-S**], Singer-Sternberg [**S-S**], Quillen [**Qu**], Kuranishi [**Ku3**], Goldschmidt [**Go**] ; à la suite de ces travaux, on aboutit à une autre définition des systèmes en involution (ou « involutifs »), plus claire et maniable ; notamment elle peut être appliquée directement aux systèmes d'équations aux dérivées partielles, sans passer par l'intermédiaire des systèmes différentiels extérieurs.

Outre les articles [**Ku3**] et [**Qu**] déjà cités (ce dernier se limitant toutefois au cas linéaire), on trouvera cette théorie exposée dans divers livres et articles plus récents [**B-C-G, Gas, Ol, Po1, Po2, Sei, Ya**]. Certains de ces exposés se placent dans le contexte des systèmes différentiels extérieurs, d'autres dans celui des équations aux dérivées partielles ; le lien entre les deux points de vue, souvent implicite, n'apparaît à ma connaissance explicitement que dans [**Ku3**]. Il reste que, à mon sens, en dehors des géomètres différentiels, cette théorie n'est pas aujourd'hui aussi connue qu'elle mériterait de l'être ; ce fait m'a incité à commencer cet article en en donnant une réexposition de plus.

Un problème laissé en suspens par ces articles est le suivant : étant donné un système différentiel qui n'est pas en involution, existe-t-il un moyen de le ramener à un autre qui ait les mêmes solutions et soit en involution ? Cartan, en particulier dans son livre classique [**Ca2**], étudie ce problème, et définit pour cela la notion de « prolongement » d'un système. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, le prolongement s'obtient simplement en dérivant les équations ; dans le cas des systèmes extérieurs, la définition est un peu plus compliquée, mais analogue. Cartan affirme qu'en général, en itérant cette opération, on arrivera à un système en involution (peut-être incompatible). Voici comment il s'exprime à ce propos [**Ca2**, p. 116].

« On voit d'après ce qui précède que, si le système donné n'est pas en involution, on a un moyen régulier d'en déduire une suite de nouveaux systèmes admettant les mêmes solutions que le système donné. On peut démontrer, *sous certaines conditions qu'il n'est du reste pas facile de préciser*, qu'on finira par arriver à un système en involution » (souligné par Cartan).

Cette assertion, assez mystérieuse, est à l'origine d'un certain nombre de travaux ; il faut mentionner avant tout les articles de Kuranishi [**Ku1, Ku2**] où il donne une version précise de cette assertion sous certaines hypothèses de régularité ; je mentionne aussi que, dans le cas des modules gradués sur des anneaux de polynômes (= traduction algébrique des systèmes linéaires à coefficients constants), le résultat est démontré chez Janet [**Ja2**]. Là encore, la version homologique de l'involutivité change les choses : le théorème de Janet devient une conséquence immédiate du théorème de finitude de Hilbert ; quant à Kuranishi, il réobtient très simplement ses résultats dans [**Ku3**], toujours sous des hypothèses de régularité convenables.

Cependant, pour obtenir un résultat général, il faut faire appel à d'autres idées. Or, il se trouve que celles-ci ont été développées de façon tout à fait indépendante dans les années 30 par Ritt, dans ses travaux sur « l'algèbre différentielle » ; je vais en parler maintenant.

Ritt, probablement en cherchant à préciser des idées de Drach sur la théorie de Galois différentielle, se pose le problème d'étudier systématiquement les idéaux définissant des systèmes d'équations aux dérivées partielle algébriques (= polynomiaux) sur $\mathbb{C}$ [**Ri1**]. Le premier résultat qu'il obtient, en collaboration avec Raudenbush est un semi-analogue du théorème de finitude de Hilbert : les suites croissantes d'idéaux différentiels réduits (= égaux à leur racine) sont stationnaires ; il est immédiat d'en déduire que de tels idéaux sont intersections finies d'idéaux premiers.

Ritt en poursuivant son analyse, montre que, génériquement, les jets d'ordre k de solutions se prolongent à l'ordre $k+1$, et même se prolongent en solutions convergentes. Pour ce dernier résultat, il utilise, non la théorie des systèmes en involution, mais la théorie parallèle des « systèmes orthonomes passifs » de Riquier [**Riq**].

Incidemment, par rapport à la théorie de Cartan, celle de Riquier a les avantages et les inconvénients suivants :

(i) La notion de système orthonome passif dépend du système de coordonnées choisies ; mais, dans n'importe quel système de coordonnées, un système différentiel peut être rendu génériquement orthonome passif.

(ii) La notion de système en involution est indépendante des coordonnées ; mais les critères effectifs d'involutivité ne sont vérifiés que dans un système de coordonnées génériques (voir toutefois la remarque I.5.8).

Donc, en gros : pour les calculs effectifs, la théorie de Riquier peut être plus commode ; mais si l'on veut des notions globales sur des variétés, elle est inutilisable, et il faut utiliser les systèmes en involution.

Cette remarque s'applique aussi aux ordres, plus généraux que ceux de Riquier, considérés par Ritt [**Ri1**], et à sa suite par Kolchin [**Ko1**] et d'autres auteurs dans l'étude des idéaux différentiels.

Il est maintenant tentant de se dire ce qui suit : les arguments de Ritt, un peu modifiés, vont montrer que, génériquement (*i.e.* hors d'une hypersurface d'un espace de jets convenable), n'importe quel système algébrique d'équations aux dérivées partielles vérifie les conditions de Kuranishi ; un tel système est alors génériquement involutif lorsqu'on le prolonge à un ordre assez grand. Cela démontrera l'assertion de Cartan, à condition d'interpréter « sous des conditions qu'il n'est pas facile de préciser » comme signifiant « aux points génériques ».

Il est surprenant que les travaux de Ritt, et par voie de conséquence cette idée, aient totalement échappé aux géomètres différentiels. Une exception cependant est celle de Pommaret [**Po1, Po2**], qui obtient un résultat très voisin, à savoir une description des idéaux premiers en termes de systèmes involutifs.

Je n'ai pris connaissance de ce travail de Pommaret qu'assez récemment, et l'article présent en est indépendant. Dans ce travail, je reprends la question, avec les différences suivantes :

(i) Je travaille dans une situation analytique, et non algébrique, c'est-à-dire que je pars d'un système différentiel analytique. Comme les dérivations donnent des fonctions polynomiales des dérivées ultérieures, on peut supposer que les équations considérées sont polynomiales par rapport aux dérivées d'ordre ℓ, pour $\ell \gg 1$. Un procédé classique de réduction ramène au cas $\ell = 1$ (ce que faisait déjà Ritt dans [**Ri2**], où il donne une version analytique « germique » du théorème de Ritt-Raudenbush).

(ii) Je donne des énoncés globaux, pour ce que j'appelle les « D-variétés ». À noter que, pour les applications que j'ai surtout en vue, groupoïdes de Lie et théorie de Galois différentielle, j'ai besoin à la fois de notions globales, et d'admettre des singularités. Dans le cas non-singulier, la notion de D-variété est essentiellement équivalente à des notions développées par différents auteurs depuis les années 80 sous divers noms (« variational bicomplex », « differentiable manifolds », *etc.*), voir [**Kr-L-V, Ts, Tu, Vi, Zh**].

Ces auteurs développent principalement ces notions à propos de problèmes de calcul des variations ; voir aussi dans [**B-G**] une version en termes de systèmes différentiels extérieurs. Ces notions ont été reprises plus récemment, sous le nom de « diffiétés » par Fliess et ses co-auteurs en vue de problèmes de contrôle (« systèmes plats ») ; voir notamment [**F-L-M-R**].

Je signale aussi que les « differential algebraic varieties » de Ritt et Kolchin [**Ri1, Ko1, Ko2, Bu-C**] sont très proches de la version algébrique des D-variétés. On peut en dire autant des $\mathcal{F}$-variétés de Buium [**Bu**], qui lui servent en particulier pour des problèmes d'arithmétique (conjecture de Mordell sur un corps de fonctions).

Quelques détails maintenant sur l'organisation de cet article. Une première partie, Chapitres I, II, III, est consacrée à une réexposition de la théorie des systèmes involutifs, en se plaçant du point de vue des équations aux dérivées partielles. Il faut y ajouter l'appendice B, qui fait le pont avec le point de vue « systèmes différentiels extérieurs ». Les innovations sont ici essentiellement de nature rédactionnelle. Je signale les suivantes.

D'une part, j'examine en détail les différentes méthodes d'obtention des obstructions au prolongement (souvent appelées « torsion » dans la littérature) ; je les compare et vérifie qu'elles coïncident au signe près.

D'autre part, dans la démonstration de l'existence des solutions convergentes (théorème de Cartan-Kähler), je reprends en la précisant la méthode que j'avais employée dans un article antérieur [**Mal2**], méthode qui sépare complètement les questions de convergence de celles relatives à l'existence des prolongements. *A priori*, cette méthode n'était pour moi qu'une curiosité destinée à varier la présentation ; j'ai donc pris connaissance avec surprise et intérêt des travaux récents de Morimoto [**Mo2, Mo3**], où il utilise cette méthode dans un cas où la réduction classique à Cauchy-Kovalevski ne semble pas s'appliquer. L'inconvénient de cette présentation est, bien sûr, de se passer du « premier théorème de Cartan-Kähler » (dont l'énoncé habituel n'est qu'un corollaire) ; cet énoncé est une remarquable version surdéterminée de Cauchy-Kovalevski, qui me semble avoir un intérêt théorique par elle-même. On trouvera à l'appendice B son énoncé, et sa démonstration dans un cas particulier.

Concernant l'appendice B, j'aimerais faire encore deux remarques :

(i) Je me limite aux systèmes différentiels extérieurs usuels, sans faire la théorie des prolongements. Il est possible d'avoir une notion généralisant un peu les D-variétés en termes de systèmes différentiels extérieurs (en gros, il suffit pour cela de reprendre les constructions de [**B-G**] en y admettant des singularités). Contrairement à mes intentions initiales, j'ai renoncé à ajouter un chapitre sur ce sujet. Après une tentative de rédaction, je l'ai trouvé lourd et sans idée vraiment nouvelle.

(ii) Le sujet traité ici se borne, suivant Cartan, à la recherche des germes de solutions convergentes. Le sujet ne doit pas être confondu avec le sujet, bien plus vaste, de l'étude générale des systèmes différentiels extérieurs, de leurs singularités (par exemple des singularités des feuilletages), de leur comportement global, *etc.*

La partie essentielle de cet article est formée des Chapitres IV et V. Au Chapitre IV, je donne les définitions des D-variétés, et j'énonce les résultats principaux. Ces résultats sont déjà annoncés, en grande partie dans [**Mal4**] et [**Mal5**], mais j'ai repris ici la question à zéro pour la raison suivante : ces deux articles, quoiqu'écrits avant celui-ci, en sont la suite logique, et en utilisent les résultats. Pour éviter tout risque de cercle vicieux, j'ai donc préféré les ignorer dans le cours principal du texte, et ne les mentionner qu'à propos de remarques accessoires. Au Chapitre V, je donne les démonstrations essentielles, théorème de finitude et théorème d'involutivité générique ; ce chapitre est le développement d'une note [**Mal3**] où la méthode suivie ici est esquissée. Enfin, à l'appendice A, je donne les propriétés des « variétés affines au-dessus d'une variété analytique complexe » qui sont utilisées à partir du Chapitre IV. Il s'agit de résultats classiques, et dans le cas algébrique, et dans le cas analytique (Nullstellensatz, cohérence de la racine, *etc.*) ; dans le cas mixte considéré ici, je n'ai pas de référence. Fort heureusement, le théorème de comparaison de Grauert-Remmert permet de se ramener facilement au cas analytique.

La définition des D-variétés, telle qu'elle est donnée ici, n'est en aucun cas intangible ; d'une part, une définition analogue peut être facilement donnée dans un contexte algébrique sur $\mathbb{C}$, ou sur un corps de caractéristique 0 algébriquement clos. Les mêmes résultats sont vrais, avec des démonstrations plus simples ; par exemple, le théorème de Frisch sur le caractère noethérien des anneaux de fonctions holomorphes sur un polydisque fermé est simplement remplacé par le théorème de finitude de Hilbert.

D'autre part, dans la situation analytique, il pourrait être commode dans certaines questions de considérer des situations mixtes plus compliquées, *i.e.* des schémas relatifs au-dessus d'une variété $\mathbb{C}$-analytique, au sens de Hakim [**Ha**]. Je me suis contenté du cas affine relatif parce que cette notion générale, assez lourde, n'apportait pas ici de résultats substantiellement nouveaux, et parce que le cas traité suffisait pour les applications que j'ai surtout en vue, à savoir une extension au cas non linéaire de la théorie de Galois différentielle.

Un mot encore : à l'exception peut-être du chapitre I, l'aspect « calcul effectif » est largement absent de ces notes. Ceci est dû en partie au point de vue analytique où je me suis placé, en partie à ma relative incompétence dans ce domaine. Je me contenterai de signaler, à la suite des travaux de Ritt, Kolchin, et Rosenfeld notamment [**Ri1, Ko1, Ro**], une suite de travaux sur les aspects algorithmiques de l'algèbre différentielle, en particulier [**B-K-M, B-L-O-P1, B-L-O-P2, Hu**] et le programme DIFF ALG [**B-H**]. Je signale qu'il existe aussi des travaux sur l'implantation de la théorie des systèmes involutifs, et la méthode d'équivalence de Cartan ; voir notamment à ce sujet [**Ka-L-S**] et [**Ne**].

Merci, pour terminer, aux nombreux collègues qui m'ont encouragé, et avec qui j'ai eu l'occasion de discuter de ces questions. Parmi eux, je citerai avant tout H. Goldschmidt et M. Kuranishi que je remercie de leur accueil et de leur hospitalité lors de nombreux passages à Columbia. Merci aussi aux collègues du groupe de calcul formel de l'INRIA à Sophia-Antipolis, en particulier à É. Hubert qui m'a introduit aux travaux de Ritt et Kolchin, et à A. Quadrat qui m'a signalé les références à Janet que j'ignorais. Merci encore à F. Ollivier pour ses nombreuses remarques et références. Merci enfin à A. Guttin-Lombard pour son travail de saisie toujours aussi impeccable.

CHAPITRE I

MODULES GRADUÉS, INVOLUTIVITÉ

1. Complexe de Koszul

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps *infini*, de caractéristique quelconque ; pour les applications aux équations aux dérivées partielles, dans les chapitres ultérieurs, k sera soit $\mathbb{C}$, soit un corps de fonctions sur $\mathbb{C}$.

Soit n un entier, fixé une fois pour toutes ; on pose $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$, et on note $A_\ell \subset A$ l'espace des polynômes homogènes de degré ℓ ; on pose aussi $A_1 = V$.

Soit M un A-module (unitaire). Rappelons la définition du *complexe de Koszul* $K_\bullet(\xi_1, \dots, \xi_n \; ; M)$ ou, en abrégé $K_\bullet(\underline{\xi} \; ; M)$ ([**Bo1, Se**]) : on pose $K_p(\underline{\xi}, M) = \wedge^p V \otimes M$, le produit tensoriel étant pris sur k ; avec les conventions usuelles, on a donc $K_p = 0$ pour $p \notin [0, n]$; la différentielle d est k-linéaire, et définie par la formule suivante, où le signe $\widehat{\ }$ désigne, comme d'habitude, que le terme correspondant doit être omis

$$d\left(\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_p} \otimes m\right) = \sum (-1)^{j+1} \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_{i_j}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_p} \otimes \xi_{i_j} m. \tag{1.1}$$

On vérifie immédiatement qu'on a $d^2 = 0$. Les groupes d'homologie correspondants sont notés $H_p(\underline{\xi}, M)$.

Exemple 1.2

(i) Si $n = 1$, le complexe $K(\xi_1 \; ; M)$ est $0 \to M \xrightarrow{\xi_1} M \to 0$; donc $H_1(\xi_1 \; ; M) = \ker \xi_1$; $H_0(\xi_1, M) = \operatorname{coker} \xi_1$.

(ii) $H_n(\underline{\xi} \; ; M) = \{m \in M \mid \xi_1 m = \dots = \xi_n m = 0\}$.

(iii) $H_0(\underline{\xi} \; ; M) = M / \sum \xi_i M$.

On écrira aussi le second membre $M/(\xi_1, \dots, \xi_n)M$.

Les deux propriétés suivantes sont immédiates :

1.3. $K_\bullet(\underline{\xi} \; ; M)$ « ne dépend pas de $\xi_1, \dots, \xi_n$ », mais seulement de V ; *i.e.* si l'on a une autre base $\eta_1, \dots, \eta_n$ de V, $K_\bullet(\underline{\xi} \; ; M)$ est canoniquement isomorphe à $K_\bullet(\underline{\eta} \; ; M)$;

Cela résulte de la formule suivante : si l'on a $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in V$, alors

$$d\,(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes m) = \sum (-1)^{j+1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha}_j \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes \alpha_j m.$$

(*Démonstration* : développer les α_j en fonction des ξ_i.)

1.4. Une suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne naissance à une suite exacte longue

$$H_{p+1}(\underline{\xi}\ ; M'') \xrightarrow{\delta} H_p(\underline{\xi}, M') \longrightarrow H_p(\underline{\xi}, M) \longrightarrow H_p(\underline{\xi}, M'') \xrightarrow{\delta} \cdots$$

Ceci est un cas particulier de la suite exacte de cohomologie (voir n'importe quel traité d'algèbre homologique) ; la flèche δ est définie ainsi : si l'on a $m'' \in \wedge^{p+1} V \otimes M''$, avec $dm'' = 0$, on relève m'' en $m \in \wedge^{p+1} V \otimes M$; dm est à valeurs dans $\wedge^p V \otimes M'$ et c'est un cycle dont la classe dans $H_p(\underline{\xi}, M')$ est indépendante de m ; par définition, cette classe est $\delta m''$.

Faisons maintenant agir A sur $K_\bullet(\underline{\xi}\ ; M)$ par $a(\xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p} \otimes m) = \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p} \otimes am$; on a le résultat suivant :

Proposition 1.5. — *Pour tous p et i, on a $\xi_i H_p(\underline{\xi}\ ; M) = 0$.*

Supposons par exemple $i = 1$; on définit un « opérateur d'homotopie » $\ell : \wedge^p V \otimes M \to \wedge^{p+1} V \otimes M$ par $\ell(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes m) = \xi_1 \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes m$. On vérifie qu'on a, pour $m \in \wedge^p V \otimes M$: $\xi_1 m = d\ell m + \ell dm$; si donc m est un cycle, on a $dm = 0$ et $\xi_1 m = d\ell m$.

Corollaire 1.6. — *Si M est de type fini sur A, les $H_p(\underline{\xi}\ ; M)$ sont de type fini sur k.*

Du fait que A est noethérien, on déduit immédiatement que les $H_p(\underline{\xi}, M)$ sont de type fini sur A ; par la proposition précédente, ils sont donc de type fini sur $A/(\xi_1, \ldots, \xi_n) = k$.

La proposition qui suit est un peu moins évidente :

Proposition 1.7. — *Il existe une suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow H_p(\xi_2, \ldots, \xi_n\ ; M) \xrightarrow{\xi_1} H_p(\xi_2, \ldots, \xi_n\ ; M) \longrightarrow H_p(\xi_1, \ldots, \xi_n\ ; M)$$
$$\longrightarrow H_{p-1}(\xi_2, \ldots, \xi_n\ ; M) \xrightarrow{\xi_1} \cdots$$

Pour établir cette proposition, considérons le complexe double

$$K_\bullet(\xi_1\ ; K_\bullet(\xi_2, \ldots, \xi_n; M));$$

ce complexe se décrit ainsi : on pose $V' = k\xi_1$, qu'on identifie à k, et $V'' = k\xi_2 \oplus \cdots \oplus k\xi_n$; la première différentielle est identifiée à ξ_1 ; la seconde est notée d''

$$\begin{tikzcd}
(V') \otimes \wedge^q V'' \otimes M \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "\xi_1"'] & (V') \otimes \wedge^{q-1} V'' \otimes M \arrow[d, "\xi_1"] \\
\wedge^q V'' \otimes M \arrow[r, "d''"] & \wedge^{q-1} V'' \otimes M
\end{tikzcd}$$

le complexe simple associé est donc, en degré p, $\wedge^{p-1}V'' \otimes M \oplus \wedge^p V'' \otimes M$, avec la différentielle $\left(\begin{smallmatrix} -d'' & 0 \\ \xi_1 & d'' \end{smallmatrix}\right)$.

En identifiant $\wedge^{p-1}V'' \oplus \wedge^p V''$ à $\wedge^p V$ par $(\alpha, \beta) \mapsto \xi_1 \wedge \alpha + \beta$ on vérifie que le complexe simple considéré n'est autre que $K_\bullet(\xi_1, \dots, \xi_n\ ; M)$. D'autre part, les éléments de ce complexe simple dont la première composante est nulle forment un sous-complexe, égal à $K_\bullet(\xi_2, \dots, \xi_n\ ; M)$; le quotient est égal à $K_\bullet(\xi_2, \dots, \xi_n\ ; M)[1]$ (*i.e.* le complexe décalé de un vers la gauche, avec la différentielle $-d''$). La suite exacte de cohomologie donne alors la suite exacte cherchée ; pour achever la démonstration il suffit d'identifier à ξ_1 l'homomorphisme de liaison de cette suite exacte (les autres flèches sont évidentes). Ceci peut être laissé en exercice au lecteur.

2. Cas des modules gradués

On rappelle qu'un A-module M est dit *gradué* si l'on a une décomposition en somme directe $M = \oplus M_\ell$, avec $A_\ell M_q \subset M_{\ell+q}$; on ne considérera ici que des graduations positives ; ou bien, ce qui revient au même, on conviendra que $M_\ell = 0$ pour $\ell < 0$.

Pour $r \in \mathbb{Z}$, on définit le module décalé $M(r)$ par $M(r)_\ell = M_{r+\ell}$ si $\ell \geqslant 0$, $M(r)_\ell = 0$ sinon. Faire attention que, si l'on a $r > 0$, dans $M(r)$ on « perd » $M_0, \dots, M_{r-1}$. Donc, en général, on n'aura pas $M(r)(s) = M(r+s)$; ceci sera seulement vrai en degrés assez grands.

Dans la suite, les modules gradués seront toujours *supposés de type fini* ; prenons des générateurs m_i, $1 \leqslant i \leqslant p$ qu'on peut supposer homogènes de degré r_i (sinon, on les remplace par leurs composantes homogènes) ; considérant l'application $(a_1, \dots, a_p) \mapsto \sum a_i m_i$, on voit ceci : *$M$ gradué, est de type fini si et seulement s'il est un quotient de $\oplus A(-r_i)$, avec $r_i \geqslant 0$.*

Considérons le complexe de Koszul $K_\bullet(\underline{\xi}\ ; M)$; la différentielle d est homogène de degré $+1$ pour la graduation, donc $K_\bullet(\underline{\xi}\ ; M)$ est somme directe de complexes $0 \to \wedge^n V \otimes M_q \to \wedge^{n-1} V \otimes M_{q+1} \to \cdots \to M_{q+n} \to 0$.

La partie homogène de degré q de $H_p(\underline{\xi}, M)$, *i.e.* celle qui provient des cycles de $\wedge^p V \otimes M_q$ sera notée $H_{p,q}(\underline{\xi}, M)$ [ou $H_{p,q}(M)$ si aucune confusion n'est possible].

Les suites exactes 1.4 et 1.7 se lisent ici ainsi