Astérisque

ALAIN LOUVEAU

Ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produits

Astérisque, tome 78 (1980)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__78__1_0>

INTRODUCTION

Cet article a pour origine des résultats de l'auteur concernant les ensembles analytiques et boréliens, dans les espaces produits de deux espaces Polonais, dont les coupes sont d'une classe de Borel donnée. Des résultats typiques concernant ces ensembles, établis dans Louveau [4], sont les suivants : Soient X et Y deux espaces Polonais, et B un borélien de l'espace X x Y. L'ensemble des points y de Y pour lesquels la coupe $B_y = \{ x : (x,y) \in B \}$ est de classe ξ - additive (resp. multiplicative) est un ensemble coanalytique dans Y. Si toutes les coupes de l'ensemble B sont de classe $\xi + 1$ - additive, B est la réunion d'une suite de boréliens de X x Y dont les coupes sont de classe ξ - multiplicative. Pour établir ces résultats, nous avons introduit une méthode nouvelle provenant de la Théorie descriptive effective des ensembles. Cette méthode, loin d'être particulière au problème des ensembles à coupes de classe de Borel donnée, est en fait très générale. Elle permet, pour de nombreuses propriétés naturelles sur les coupes, d'obtenir des résultats, analogues à ceux indiqués plus haut, pour la famille des parties boréliennes des espaces produits dont les coupes jouissent d'une de ces propriétés. De plus, en permettant de mieux comprendre les phénomènes, cette méthode nous a permis de dégager un cadre de référence adéquat pour élaborer une théorie systématique des ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produits.C'est ce double aspect d'une théorie générale et systématique d'une part, et de résultats nouveaux étendant ceux obtenus pour les classes de Borel d'autre part, que nous allons développer ici.

La considération d'ensembles dont les coupes jouissent d'une propriété fixée à l'avance n'est pas neuve en Théorie descriptive des ensembles. On la trouve au tout début de cette théorie, soit comme méthode de génération des ensembles analytiques (cribles de Lusin), soit pour résoudre le problème des fonctions implicites (étude des boréliens à coupes dénombrables). Au cours des recherches ultérieures, le nombre de propriétés sur les coupes envisagées s'est accru, et il existe maintenant une littérature importante sur le sujet. Cependant, les tentatives de systématisation n'ont été que partielles, probablement par manque d'outils généraux pour attaquer ces problèmes. Avant de préciser nos résultats nous allons essayer de dégager les thèmes de recherche et les problèmes abordés par les différents auteurs.

Soient donc X un espace Polonais, et Φ une famille de parties de X (celles qui jouissent de la propriété particulière que nous voulons étudier). Considérons d'autre part un espace Polonais auxiliaire Y.

Le premier problème étudié est celui de la complexité de la famille Φ (ou pour être plus précis, des Boréliens de la famille Φ), complexité que l'on peut mesurer de la manière suivante : A chaque borélien B de l'espace X x Y, nous associons l'ensemble H_B des points y de l'espace Y pour lesquels la coupe B_Y est élément de Φ. La complexité de Φ est alors mesurée par la complexité de l'ensemble H_B. Les familles qui vont nous intéresser dans ce travail sont celles pour lesquelles l'ensemble H_B est coanalytique, quel que soit le borélien B. Historiquement,de nombreux auteurs ont préféré considérer le complémentaire de l'ensemble H_B. Notons $\pi_Y^\Phi(B) = Y - H_B$ ce complémentaire, par analogie avec le cas où $\Phi = \{\phi\}$, et où π_Y^Φ n'est autre que la projection π_Y sur Y. L'opération π_Y^Φ ainsi définie, qui transforme les boréliens de X x Y en parties de Y, peut être appelée le crible généralisé relatif à Φ , le crible de Lusin en étant un cas particulier, où X est l'espace $\mathbb{R}$ et Φ est la famille des parties de $\mathbb{R}$ bien ordonnées par l'ordre canonique. Les familles Φ qui vont nous intéresser sont donc celles pour lesquelles le crible généralisé transforme les boréliens en analytiques. Un problème, connexe au précédent, est celui de la génération de tous les ensembles analytiques de Y à partir des boréliens de $X \times Y$ par l'opération de crible généralisé relatif à Φ. La solution positive apportée à ce problème dans le cas du crible de Lusin (cf Lusin [1]) est à l'origine de la décomposition des ensembles coanalytiques en leurs constituantes, et de l'étude des propriétés structurelles de ces ensembles.

Un second thème d'étude concerne les problèmes de séparation.Grossièrement, il s'agit de relier les ensembles analytiques à coupes dans Φ aux boréliens ayant la même propriété. La propriété généralement envisagée est la suivante : Soient A^1 un ensemble analytique de l'espace X x Y dont les coupes sont dans Φ , et A^2 un autre ensemble analytique de l'espace X x Y, disjoint de l'ensemble A^1. Peut-on séparer A^1 de A^2 par un borélien B de X x Y à coupes dans Φ, c'est-à-dire trouver un borélien B à coupes dans Φ qui contienne A^1 et soit disjoint de A^2 ? Nous appellerons cette propriété de Φ la propriété d'approximation, puisque cette propriété exprime que les analytiques à coupes dans Φ ont "beaucoup" d'approximations boréliennes qui sont aussi à coupes dans Φ.

Cette façon d'envisager le problème de la séparation est particulièrement bien adaptée au cas où la famille Φ est héréditaire, c'est-à-dire si toute sous-partie d'un élément de Φ est dans Φ (et on peut voir que dans ce cas la propriété d'approximation se réduit au cas particulier où on fait $A^2 = \phi$ dans la définition précédente). Cependant, cette propriété est très asymétrique et lorsque Φ n'est pas héréditaire, il est préférable d'étudier une autre propriété de séparation, qui porte vraiment sur les couples d'analytiques, et que nous appelons propriété de biséparation : Soient A^1 et A^2 deux ensembles analytiques de l'espace $X \times Y$, tels que pour chaque point y de Y, la coupe A^1_y est séparable de la coupe A^2_y par un élément de Φ . Est-il possible de séparer l'ensemble A^1 de l'ensemble A^2 par un borélien B à coupes dans Φ ? Il est facile de vérifier que cette propriété de biséparation est plus forte que la propriété d'approximation, et lui est équivalente dans le cas d'une famille Φ héréditaire. De plus, la propriété de biséparation est symétrique au sens suivant : Si une famille Φ jouit de cette propriété, la famille Φ_c des complémentaires des éléments de Φ en jouit aussi.

Un troisième problème est celui de la commutativité avec les opérations ensemblistes. Considérons une opération ensembliste f. Suivant une notation classique, nous noterons Φ_f la famille des parties de l'espace X qui sont obtenues par l'opération f à partir d'éléments de la famille Φ . Ainsi Φ_c correspond à l'opération c de passage au complémentaire, Φ_σ à l'opération σ de réunion dénombrable, etc ... Le problème de commutativité , sous sa forme générale, peut alors s'énoncer : Si B est un ensemble borélien dans $X \times Y$ dont les coupes sont éléments de Φ_f , est-ce que B peut être obtenu comme le résultat de l'opération f effectuée sur les boréliens de $X \times Y$ à coupes dans Φ ? Dans la suite de ce travail nous étudierons le cas particulier de ce problème qui concerne l'opération de réunion dénombrable, c'est-à-dire : Si B est un borélien de $X \times Y$ à coupes dans Φ_σ , est-ce que B est la réunion dénombrable de boréliens à coupes dans Φ ?

Il reste un quatrième grand type de problèmes concernant les boréliens des espaces produits. Il s'agit des problèmes d'uniformisation (ou de sélection) par des fonctions boréliennes. Nous n'aborderons pas ces problèmes dans ce travail, car ils sont d'un esprit assez différent et relèvent d'autres techniques. D'ailleurs, on ne sait résoudre positivement ces problèmes que pour un petit nombre de familles, comme la famille des ensembles dénombrables, la famille des compacts, la famille des ensembles K_σ, la famille des ensembles de mesure de Lebesgue strictement positive ou la famille des ensembles non maigres. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Dellacherie [1] pour une discussion de ces problèmes.

Ces différents thèmes d'étude étant précisés, il s'agit de trouver des critères sur la famille Φ permettant de résoudre positivement l'un ou l'autre des problèmes envisagés. De tels critères ont été avancés par plusieurs auteurs, principalement Dellacherie [2] pour le problème de la complexité, Cenzer et Mauldin [1] et Burgess [1] pour le problème de l'approximation, et Hillard [1], pour le problème de la commutativité avec la réunion dénombrable. Notre travail est d'un esprit différent : Nous allons considérer globalement la classe de toutes les familles pour lesquelles les trois problèmes ont une solution, et étudier les propriétés de clôture de cette classe par les opérations ensemblistes usuelles sur les familles.

Nous étudierons en particulier :
- le passage $\Phi \mapsto \Phi_c$ à la famille des complémentaires
- le passage $\Phi \mapsto \Phi_\sigma$ à la famille des unions dénombrables (et plus généralement aux classes de la hiérarchie borélienne, Φ_σ, $\Phi_{\sigma c}$, $\Phi_{\sigma c \sigma}$, etc, construite au-dessus de Φ).
- les passages $(\Phi_n) \mapsto \bigcap_n \Phi_n$ et $(\Phi_n) \mapsto \bigcup_n \Phi_n$ d'une suite dénombrable de familles à leur intersection ou à leur réunion.
- le passage d'une famille Φ (dans un espace X) à la famille $s(\Phi)$ des ensembles à coupes dans Φ (dans un espace produit X x Y).
- le passage de deux familles Φ_1 et Φ_2 (dans des espaces respectifs X_1 et X_2) à la famille $\Phi_1 \times \Phi_2$ des rectangles à côtés dans Φ_1 et Φ_2 (dans l'espace $X_1 \times X_2$).

Ces opérations sur les familles sont étudiées dans le chapitre 2. Le coeur de ce chapitre est consacré à l'étude de l'opération $\Phi \mapsto \Phi_\sigma$. Plus précisément, nous introduisons une condition suffisante concernant la famille Φ pour que d'une part Φ ait la propriété de commutativité avec la réunion dénombrable, et que d'autre part on puisse résoudre pour Φ_σ les problèmes de complexité et de biséparation. Ceci conduit à la notion centrale de famille régulière. Nous étudions également les propriétés de clôture de la classe des familles régulières, et prouvons en particulier que cette classe est close par l'opération $\Phi \mapsto \Phi_{\sigma c}$. Ces résultats permettent, à partir de la connaissance de familles régulières primaires, de construire un très grand nombre de familles Φ pour lesquelles une théorie complète peut être faite.

Le chapitre 3 est consacré à la recherche de telles familles régulières primaires, et donc aux applications des résultats du chapitre 2. Pour cela, nous