JEAN-BENOÎT BOST
JEAN-FRANÇOIS MESTRE
LAURENT MORET-BAILLY

Sur le calcul explicite des « classes de Chern » des surfaces arithmétiques de genre 2

Astérisque, tome 183 (1990), p. 69-105
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__69_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 183 (1990)

Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre 2.

Jean-Benoît BOST, Jean-François MESTRE, Laurent MORET-BAILLY.

Introduction

Soient K un corps de nombres, A l'anneau des entiers de K et $B = \operatorname{Spec} A$. Dans cet article, nous expliquons comment calculer les invariants $\deg f_*\omega_{X/B}$ et

$$(\omega_{X/B}.\omega_{X/B}) := \deg \langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle,$$

définis à la Arakelov, attachés à une courbe semi-stable $f : X \rightarrow B$, de fibre générique lisse et de genre 2.

Rappelons que ces deux nombres jouent un rôle analogue, en géométrie arithmétique, à celui des invariants c_1^2 et c_2 d'une surface projective irréductible lisse sur un corps (*cf.* [7]). En effet, si $f : X \rightarrow B$ est un morphisme surjectif d'une telle surface vers une courbe lisse de genre q, qui fait de X une B-courbe semi-stable de genre g, alors $c_1^2(X)$ et $c_2(X)$ s'expriment simplement en fonction de g, q et des entiers $\deg f_*\omega_{X/B}$ et $(\omega_{X/B}.\omega_{X/B})$ (définis au moyen de la théorie classique de l'intersection). Explicitement, il vient d'après [7] (1.2.1 – 1.2.2) et les formules de Riemann-Roch et de Noether:

$$c_1^2(X) = (\omega_{X/B}.\omega_{X/B}) + 2(2g-2)(2q-2)$$

$$c_2(X) = 12 \deg f_*\omega_{X/B} - (\omega_{X/B}.\omega_{X/B}) + (2g-2)(2q-2).$$

En géométrie arithmétique, l'auto-intersection $(\omega_{X/B}.\omega_{X/B})$ est, de loin, le plus difficile à évaluer des deux nombres réels $\deg f_*\omega_{X/B}$ et $(\omega_{X/B}.\omega_{X/B})$. Pour le calculer, lorsque X est de genre 2, nous procédons en deux étapes:

- Au §1, nous exprimons $(\omega_{X/B}.\omega_{X/B})$ au moyen de l'intersection d'Arakelov $(P.Q)$ de deux points de Weierstrass P et Q de X.

- Au §2, nous évaluons la "composante archimédienne" de $(P.Q)$: si σ est un plongement archimédien de K et si X_σ désigne la surface de Riemann $X \otimes_\sigma \mathbf{C}$, la valeur $G_\sigma(P,Q)$ de la fonction de Green-Arakelov de X_σ peut s'exprimer au moyen des valeurs en des points de 2-torsion de la fonction de Néron $\|\theta\|$ sur la jacobienne $\operatorname{Pic} X_\sigma$ et de l'intégrale sur $\operatorname{Pic} X_\sigma$ de $\log \|\theta\|$ (*cf.* [2]).

Indiquons que l'on aurait pu calculer l'invariant $(\omega_{X/B}.\omega_{X/B})$ en utilisant la formule pour l'invariant δ de Faltings donnée dans [2] et la formule de Noether pour une surface arithmétique (*cf.* [5]) sous la forme précisée figurant dans [8]. La méthode suivie dans cet article évite de recourir à ce dernier résultat.

Dans les §3 et §4, nous effectuons le calcul numérique de $\deg f_*\omega_{X/B}$ et $(\omega_{X/B}.\omega_{X/B})$ dans des cas particuliers explicites. Nous considérons ainsi la courbe sur $\mathbf{Q}$, lisse, admettant comme modèle plan

$$y^2 = x(x-1)(4x^3+13x^2-17x+4).$$

Cette courbe a réduction semi-stable sur $\mathbf{Q}$ et a bonne réduction en dehors de 21737. Son modèle stable $X \to B = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ est régulier, de fibre en 21737 une courbe nodale irréductible possédant un unique point singulier. On trouve:

$$\deg f_*\omega_{X/B} = -1{,}466599\ldots, \quad (\omega_{X/B}.\omega_{X/B}) = 2{,}32\ldots.$$

Nous considérons ensuite la courbe sur $\mathbf{Q}$, lisse, admettant comme modèle

$$y^2 + y = x^5.$$

Cette courbe, dont la jacobienne est à multiplications complexes par $\mathbf{Z}[\zeta_5]$, où ζ_5 désigne une racine primitive cinquième de 1, a bonne réduction potentielle partout. Sur l'anneau des entiers B' du corps $K' = \mathbf{Q}(\sqrt{1-\zeta_5}, \sqrt[5]{2})$, elle admet un modèle X' ayant bonne réduction partout. Le calcul donne:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[K':\mathbf{Q}]}\deg f_*\omega_{X'/B'} &= \log 4\pi - \frac{1}{2}\log \Gamma(1/5)^5\Gamma(2/5)^3\Gamma(3/5)\Gamma(4/5)^{-1} \\
&= -2{,}597239125\ldots \\
\frac{1}{[K':\mathbf{Q}]}(\omega_{X'/B'}.\omega_{X'/B'}) &= 0{,}2162\ldots.
\end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs, on vérifie que X' fournit un contre-exemple à certaines conjectures sur les "classes de Chern" des surfaces arithmétiques, du moins dans leur version la plus naïve (*cf.* §4.5). Le lecteur pourra d'ailleurs constater qu'il en est de même de l'exemple précédent.

Signalons que les invariants des surfaces arithmétiques $\deg f_*\omega_{X/B}$ et $\deg \langle\omega_{X/B}, \omega_{X/B}\rangle$ considérés dans cet exposé sont en fait des invariants de courbes sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Plus précisément, pour toute courbe C lisse, irréductible et complète sur $\overline{\mathbf{Q}}$, de genre ≥ 1, on peut trouver un corps de nombres K

sur lequel C est définie et a réduction semi-stable. Considérons alors un modèle semi-stable $X \to B$ de C sur l'anneau des entiers de K et posons

$$e(X) = [K : \mathbf{Q}]^{-1} \deg \langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle.$$

On peut montrer que le nombre réel $e(X)$ est indépendant du choix du corps K et du modèle X ([7], §5.4). Il en va de même du quotient

$$h(X) = [K : \mathbf{Q}]^{-1} \deg f_* \omega_{X/B},$$

qui n'est autre que la hauteur géométrique (ou hauteur de Faltings stable) de la jacobienne de X.

Nous utilisons dans cet exposé les définitions et notations introduites dans [9], auquel nous renvoyons pour tout ce qui concerne la géométrie d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques. En fait, nous ne faisons appel qu'à la théorie de l'intersection d'Arakelov (*cf.* [1] et [5], §2) dans la version que permet d'en donner l'accouplement de Deligne (*cf.* [9] et [4]).

Précisons que, si M est une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$, nous munissons $\mathcal{O}_{M \times M}(\Delta_M)$ de la métrique bipermise normalisée comme en [9], (4.11.4.2), condition 4 — c'est-à-dire de la métrique définie par la fonction de Green-Arakelov sur $M \times M$ — et ω_M de la métrique qui s'en déduit (*cf.* [9], §4.11.3). Les "crochets de Deligne" considérés plus loin seront munis des métriques déduites de ces dernières. En outre, nous munissons $H^0(M, \omega_M)$ du produit scalaire $(.\mid.)$ défini par

$$(\alpha \mid \beta) = \frac{i}{2} \int_M \alpha \wedge \overline{\beta}, \tag{1}$$

et $\Lambda^g H^0(M, \omega_M)$ de la métrique $\|.\|$ qui s'en déduit:

$$\|\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_g\|^2 = \det((\alpha_k \mid \alpha_l))_{1 \leq k,l \leq g} \tag{2}$$

(*cf.* [9], §4.12). Ce dernier choix de métrique intervient pour définir $\deg f_* \omega_{X/B}$. Il est malheureusement quelque peu arbitraire. La métrique $\|.\|'$ définie par

$$\|\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_g\|'^2 = \det \left(\frac{i}{2\pi} \int_M \alpha_k \wedge \overline{\alpha_l} \right)_{1 \leq k,l \leq g}$$

est peut-être plus naturelle. Nous noterons $\deg' f_* \omega_{X/B}$ le degré d'Arakelov de $f_* \omega_{X/B}$ calculé en munissant $\Lambda^g f_* \omega_{X/B}$ de cette métrique aux places archimédiennes. Il vient

$$\deg' f_* \omega_{X/B} = \deg f_* \omega_{X/B} + \frac{g}{2} [K : \mathbf{Q}] \log \pi$$

et

$$h'(X) := [K : \mathbf{Q}]^{-1} deg' f_* \omega_{X/B} = h(X) + \frac{g}{2} \log \pi.$$

1. Faisceau canonique et points de Weierstrass des courbes de genre 2

1.1. Calcul du faisceau canonique

Dans ce paragraphe et le suivant, on se donne un schéma B et une B-courbe $f : X \to B$ projective lisse à fibres géométriquement connexes de genre 2.

Le $\mathcal{O}_B$-module $f_*\omega_{X/B}$ est localement libre de rang 2 et le morphisme "canonique"

$$\pi : X \longrightarrow \Gamma := \mathbf{P}(f_*\omega_{X/B})$$

est un revêtement double (génériquement séparable dans chaque fibre) de Γ, qui est une B-courbe localement isomorphe à $\mathbf{P}^1_B$ pour la topologie de Zariski sur B. Par définition de π, on a un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/B} \xrightarrow{\sim} \pi^*\mathcal{O}_\Gamma(1). \tag{3}$$

On note σ l'involution hyperelliptique de X, *i.e.* l'involution associée à π.

Si L et M sont deux faisceaux inversibles sur X, on note $\langle L, M\rangle$ l'accouplement de Deligne de L et M: c'est un faisceau inversible sur B, défini à isomorphisme unique près. Si D est un diviseur de Cartier sur X, on notera $\langle D, M\rangle$ pour $\langle \mathcal{O}_X(D), M\rangle$.

Soit $P : B \to X$ une section de f: l'image de P est un diviseur relatif dans X, également noté P. Ainsi, si M est un faisceau inversible sur X, on a (par définition de $\langle\ ,\ \rangle$) un isomorphisme canonique $P^*M \xrightarrow{\sim} \langle P, M\rangle$.

Le diviseur $P + \sigma P$ est image réciproque par π du diviseur $\pi(P)$ sur Γ. Ce dernier est l'image d'une section de Γ sur B, de sorte que $\mathcal{O}_\Gamma(\pi(P))(-1)$ provient de B. Compte tenu de (3), on en déduit que $\omega_{X/B} \otimes \mathcal{O}_X(-P - \sigma P)$ est de la forme f^*L, où L est un faisceau sur B. On calcule L par restriction à la section P; on obtient ainsi

$$L = \langle P, \omega_{X/B}\rangle \otimes \langle P, -P - \sigma P\rangle.$$

La formule d'adjonction

$$\langle P, P\rangle \xrightarrow{\sim} \langle -P, \omega_{X/B}\rangle$$

donne alors

$$L = \langle P, -2P - \sigma P\rangle.$$

On dispose ainsi d'un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(P + \sigma P) \otimes f^*\langle P, -2P - \sigma P\rangle. \tag{4}$$

Le cas qui nous intéresse est celui où P est un point de Weierstrass de X, c'est-à-dire où $P = \sigma P$: