… K.A.M.

• M.-C. Arnaud

1. Les systèmes hamiltoniens

Les systèmes hamiltoniens modélisent de très nombreux systèmes physiques, qu'on appelle aussi parfois *conservatifs*, pour lesquels une quantité particulière, l'énergie, est conservée.

On peut les définir sur n'importe quelle variété, mais pour simplifier nous allons les introduire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ou sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On se donne une fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, qu'on appelle *hamiltonien*. Les équations de Hamilton associées sont des équations différentielles dont on note $t \mapsto (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ les solutions :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p).$$

Ainsi, à un système issu de la mécanique classique décrit par un potentiel $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial q} \qquad (1)$$

où q représente la position d'un point massif de masse m, on associe le hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ défini par

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 - V(q).$$

Les équations de Hamilton sont

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q}(q). \qquad (2)$$

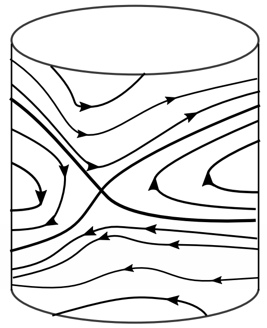
Alors, (q,p) est solution de (2) si et seulement si q est solution de (1) et $p = m\frac{dq}{dt}$ est la quantité de mouvement.

Remarquez que le hamiltonien s'écrit en fonction de q et $\frac{dq}{dt}$ comme

$$H = \frac{m}{2}\left\|\frac{dq}{dt}\right\|^2 - V(q)$$

c.-à-d. comme l'énergie totale du système, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Figure 1 – Les courbes de niveau d'un hamiltonien sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$



C'est une propriété générale que le hamiltonien est constant le long des orbites hamiltoniennes (on dit que le hamiltonien est une *intégrale*). Ses orbites restent donc dans les niveaux d'énergie $\{H = \text{constante}\}$.

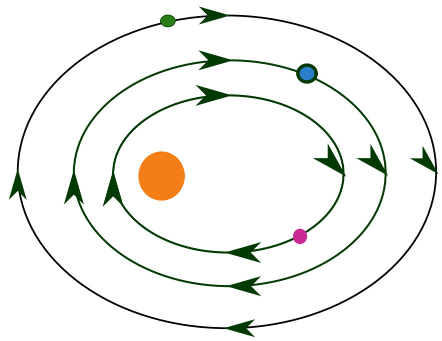
2. Le problème de la stabilité et les systèmes intégrables

Il y a un système très classique qui est décrit par un potentiel. Il s'agit du *problème des N-corps* : N-corps massifs soumis à la force d'attraction universelle. Le potentiel pour N-corps en positions $q_1, \dots, q_N$ de masses $m_1, \dots, m_N$ est

$$V(q) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

On connait depuis Newton les équations différentielles qui gouvernent les mouvements des planètes, mais dès qu'il y a au moins trois corps, on ne sait pas calculer explicitement les solutions. On aimerait pourtant répondre à une question qui est extrêmement naturelle : notre système solaire va-t-il continuer d'exister plus ou moins comme actuellement ou va-t-il connaître des changements dramatiques, comme une planète qui partirait à l'infini ou comme deux planètes qui entreraient en collision ?

FIGURE 2 – Un système de 4 corps : un soleil et 3 planètes



Ce système hamiltonien est en fait compliqué, et avant d'y revenir, décrivons les systèmes hamiltoniens les plus simples qui soient, ceux qu'on appelle complètement intégrables.

L'exemple « bébé » est donné par une fonction $H : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui ne dépend que de la deuxième coordonnée $p \in \mathbb{R}^n$: $H(q,p) = h(p)$. Les équations de Hamilton sont alors

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dh}{dp}(p) \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = 0.$$

L'évolution du système dynamique associé aux équations de Hamilton est décrite par son *flot* $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ [1]. Le flot au temps t, $\varphi_t^H : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme défini comme suit : à tout $x_0 = (q_0, p_0) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, si $x : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ désigne la solution telle que $x(0) = x_0$, alors $\varphi_t^H(x_0) = x(t)$. Dans notre exemple précis, le flot est donné par

$$\varphi_t^H(q,p) = (q + t\frac{dh}{dp}(p), p).$$

On observe que $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ est feuilleté par les tores $\mathbb{T}^n \times \{p_0\}$ qui sont tous invariants par le flot hamiltonien, et que la restriction du flot à chacun de ces tores est le flot de rotation $(q, p_0) \mapsto (q + t\alpha, p_0)$ engendré par $\alpha = \frac{dh}{dp}(p_0)$. En particulier, toutes les orbites sont bornées et on peut dire qu'un tel système est stable.

Plus généralement, un hamiltonien H est dit *complètement intégrable* sur un ouvert $U \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ invariant par le flot s'il existe n fonction de classe C^2 $H_1, \ldots, H_n : U \to \mathbb{R}$ telles que

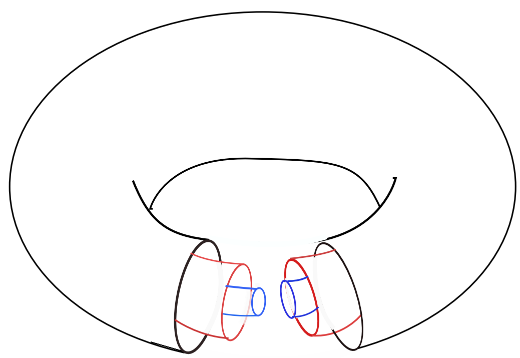
- les fonctions H_i sont toutes constantes le long des orbites contenues dans U (on parle alors d'*intégrales premières*) ;
- les flots hamiltoniens des H_i commutent deux à deux ;
- en chaque $x \in U$, les formes linéaires $dH_1(x)$, ..., $dH_n(x)$ sont linéairement indépendantes.

Le *théorème d'Arnold-Liouville* (voir [1]) dit que sous ces hypothèses, si une composante connexe $\mathcal{N}$ d'un n-niveau $\{H_1 = c_1, \ldots, H_n = c_n\}$ est compacte, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathcal{N}$ dans U, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{T}^n \times V$ tel que

- $\psi(\mathcal{V}) = \mathbb{T}^n \times V$;
- il existe un hamiltonien $K : \mathbb{T}^n \times V \to \mathbb{R}$ qui ne dépend que de $p \in V$ tel que sur $\mathcal{V}$, on a

$$\varphi_t^H = \psi^{-1} \circ \varphi_t^K \circ \psi.$$

FIGURE 3 – Les tores dans un système complètement intégrable



En d'autres termes, quitte à faire un changement de coordonnées sur un voisinage tubulaire $\mathcal{V}$ du tore $\mathcal{N}$, on s'est ramené à l'exemple bébé : $\mathcal{V}$ est feuilleté par des tores plongés invariants sur lesquels la dynamique est conjuguée à un flot de rotations. En particulier, une condition initiale près de $\mathcal{N}$ donne une orbite entière près de $\mathcal{N}$: on a stabilité.

Il existe des exemples classiques de systèmes complètement intégrables, comme le flot géodésique sur un ellipsoïde. Mais à priori le système so-

1. Pour simplifier, on supposera les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. On sait montrer dans certains cas qu'il n'existe pas assez d'intégrales qui soient analytiques réelles pour le problème des N-corps. Par contre, à ma connaissance, il n'existe pas de tels résultats concernant le non-intégrabilité C^∞.

laire et le problème des N-corps ne sont pas complètement intégrable [2].

3. Retour sur le problème des N-corps : séries de Lindstedt et problème des petits dénominateurs

Dans son ouvrage maintenant classique *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Henri Poincaré s'intéresse au problème des N-corps [3]. On commence par partir d'un système imaginaire où on ne considère que les interactions Soleil-Planète mais pas les interactions mutuelles entre les planètes. On a ainsi huit problèmes de Kepler (problèmes à deux corps où le mouvement s'effectue suivant des ellipses, chaque problème correspondant au soleil et une planète) indépendants, qu'on peut aussi voir comme huit oscillateurs indépendants. Mathématiquement, même si cela peut sembler étrange au lecteur, cela revient à supposer que les planètes sont toutes de masse nulle. Ce système est complètement intégrable mais peu conforme à la réalité.

L'idée de Linstedt est alors de perturber le système en supposant les masses des planètes « petites » (c.-à-d. toutes proportionnelles à une même petit paramètre μ). On cherche alors des tores invariants qui soient des perturbations des tores invariants qui apparaissaient dans le cas complètement intégrable (quand $\mu = 0$), dont l'équation s'écrit comme une série entière en μ. Pour trouver chaque coefficient de ce développement en puissances de μ, on utilise l'équation de Hamilton (ou plutôt celle qui s'appelle l'équation de Hamilton-Jacobi mais qui n'est pas l'objet de ce texte) et on obtient chacun de ces coefficients comme une série formelle en fonctions trigonométriques des coordonnées $y = (y_1, \ldots, y_n)$ comme suit

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \\ &+ \sum \frac{B \sin(k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n)}{k_1.f_1 + k_2.f_2 + \cdots + k_n.f_n} \\ &+ \sum \frac{C \cos(k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n)}{k_1.f_1 + k_2.f_2 + \cdots + k_n.f_n}. \end{aligned}$$

où les k_i parcourent l'ensemble des entiers non tous nuls et les f_i sont les fréquences des mouvements découplés : en d'autres termes, sur le tore considéré avant perturbation, le mouvement était conjugué à $t \mapsto (\theta_1 + tf_1, \ldots, \theta_n + tf_n)$.

On constate de suite un problème pour les $(f_1, \ldots, f_n)$ qui forment une famille liée sur $\mathbb{Q}$, car alors un des dénominateurs s'annule et la méthode ne s'applique pas : on parle alors de *résonance*. Même dans le cas où la famille des fréquences est libre sur $\mathbb{Q}$, certains dénominateurs sont très proches de 0 : on parle alors de *petits dénominateurs*. On ne peut donc jamais assurer la convergence de la série... sauf si on sait contrôler les coefficients B et C.

Poincaré ne savait pas contrôler ces coefficients, et il a fallu attendre une cinquantaine d'année avant d'avoir une réponse positive (mais dépendant des fréquences considérées) sur la convergence. Comme le dit François Béguin dans l'excellent texte [3] : *Poincaré a montré qu'il y a un risque que le système solaire soit instable, et Kolmogorov, Arnol'd et Moser ont montré qu'il y a de bonnes chances pour qu'il soit stable.*

4. La genèse des théorèmes K.A.M.

En 1954, Andreï Kolmogorov annonça que sous certaines hypothèses de non dégénérescence, beaucoup de tores invariants d'un système analytique complètement intégrable persistent sous une perturbation analytique assez petite. L'article ne comportait pas de preuve complète des résultats. Le jeune Jürgen Moser fut sollicité comme rapporteur par les *Math Reviews*. Il développa une machinerie puissante qui donna la première démonstration du résultat de Kolmogorov, mais dans un cas suffisamment différentiable au lieu d'analytique. Moser publia ses résultats en 1962. Un an après, Vladimir Arnol'd, un brillant élève de Kolmogorov, publia sa preuve du théorème de Kolmogorov dans le cadre original ; la preuve d'Arnol'd s'applique au problème des N-corps ; c'est pourquoi ces résultats sont maintenant connus sous l'acronyme K.A.M (les articles fondateurs étant [8], [10] et [2]).

Les tores qui persistent sont ceux dont les fréquences sont diophantiennes, où un nombre $f = (f_1, \ldots, f_n)$ est dit *diophantien* si il existe $\gamma > 0$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$, tout $q \in \mathbb{Z}$ tels que $(p, q) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}}$, on a

$$|f.p - q| \geqslant \frac{\gamma}{\left(q^2 + \sum_{k=1}^n p_k^2\right)^{\frac{\tau}{2}}}.$$

3. Sur l'aspect historique, voir aussi le texte [6] de Jacques Féjoz.