446

ASTÉRISQUE

2023

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2022/2023
EXPOSÉS 1197–1210

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre-et-Marie-Curie
75231 Paris Cedex 05 (France) `https://www.bourbaki.fr`

Mots clés et classification mathématique

Exposé n° 1197. — Modular forms, congruence subgroups, Fourier coefficients, unbounded denominators, algebraicity theorems, uniformisation of Riemann surfaces, Nevanlinna theory – 11F11, 11F30, 14G99, 20H05, 30D35, 30F35, 33C05.

Exposé n° 1198. — Théorie cinétique des gaz, équation de Boltzmann, limite de Boltzmann–Grad, cumulants, équation de Hamilton–Jacobi, grandes déviations, fluctuations – 82C22, 35Q20, 35Q70, 82B40.

Exposé n° 1199. — Pointwise ergodic theory, discrete harmonic analysis, Jean Bourgain – 37A46.

Exposé n° 1200. — Automorphisme de Frobenius asymptotique, théorie de l'intersection, automorphisme générique – 14G17, 14C17, 12L12.

Exposé n° 1201. — Conjectures homologiques, anneaux et espaces perfectoides, algèbres de Cohen–Macaulay – 13C14, 13H10, 13D22, 13D02, 14G45.

Exposé n° 1202. — Free probability, random permutations, random matrices, random graphs, expander graphs, strong asymptotic freeness, non-backtracking operators – 60B20, 15B52, 46L54, 05C48.

Exposé n° 1203. — Algèbres de von Neumann, problème de plongement de Connes, complexité algorithmique, corrélations quantiques, MIP*=RE – 46L06, 46L10, 68Q10, 81P05, 81P45.

Exposé n° 1204. — Topologie symplectique, homologie de Floer, groupes d'homéomorphismes, groupes de difféomorphismes – 37B55, 53D40, 37A05, 37C85, 57S25.

Exposé n° 1205. — Carleson problem, Schrödinger operator, multilinear harmonic analysis, Fourier restriction – 42B10, 42B37, 81U30.

Exposé n° 1206. — Hyperbolic groups, exponential growth rates, limit groups – 20F67, 20E08, 57K32, 20F69.

Exposé n° 1207. — Set theory, model companionship, continuum problem, forcing axioms, large cardinals – 03E35, 03E50, 03E57, 03C10, 00A30, 03A05.

Exposé n° 1208. — Équations de Navier–Stokes, solutions de Leray, non-unicité, instabilité spectrale – 35Q30, 76D03, 76D05, 35P15.

Exposé n° 1209. — Catégories tensorielles, caractéristique positive – 18M05, 18M25, 20C20.

Exposé n° 1210. — Percolation, universality, rotation invariance, star-triangle – 60K35.

SÉMINAIRE BOURBAKI

Volume 2022/2023
Exposés 1197–1210
doi : 10.24033/ast.1205

Résumé. — Ce 74e volume du Séminaire Bourbaki contient les textes des quatorze exposés présentés pendant l'année 2022/2023 : conjecture des dénominateurs non bornés, validité de la théorie cinétique des gaz, théorie ergodique ponctuelle, théorème de Lang–Weil tordu, conjecture du facteur direct, permutations aléatoires et graphes de Ramanujan, algèbres de von Neumann et corrélations quantiques, structure du groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension 2, convergence ponctuelle pour l'équation de Schrödinger, croissance exponentielle dans les groupes hyperboliques, axiomes de forcing forts et hypothèse du continu, non-unicité des solutions de Leray de l'équation de Navier–Stokes, catégories tensorielles en caractéristique positive, invariance par rotation pour la percolation planaire.

Abstract. — This 74th volume of the Bourbaki Seminar gathers the texts of the fourteen lectures delivered during the year 2022/2023: unbounded denominators conjecture, validity of the kinetic theory of gases, pointwise ergodic theory, twisted Lang–Weil theorem, direct factor conjecture, random permutations and Ramanujan graphs, von Neumann algebras and quantum correlations, structure of the group of homeomorphisms of the 2-dimensional sphere, pointwise convergence for the Schrödinger equation, exponential growth in hyperbolic groups, strong forcing axioms and the continuum problem, non-uniqueness of Leray solutions to the Navier–Stokes system, tensor categories in positive characteristic, rotation invariance for planar percolation.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2023

TABLE DES MATIÈRES

Résumé des exposés

Javier Fresán. — *The unbounded denominators conjecture* [*after F. Calegari, V. Dimitrov, and Y. Tang*]
Let f be a modular form for a finite index subgroup Γ of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ whose Fourier coefficients are algebraic numbers. It follows from the classical theory of modular forms that these coefficients have bounded denominators when Γ is a congruence subgroup. In the late 1960s, Atkin and Swinnerton-Dyer conjectured that, conversely, a form with bounded denominators is always modular for a congruence subgroup. I will explain a recent proof of this conjecture by Calegari, Dimitrov, and Tang. It relies on beautiful interactions between a new algebraicity theorem for power series, Nevanlinna theory for explicit uniformisations of the complex plane minus the roots of unity, and the fact that $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[1/p])$ has the congruence subgroup property.

François Golse. — *Validité de la théorie cinétique des gaz : au-delà de l'équation de Boltzmann* [*d'après T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond et S. Simonella*]
L'obtention d'une justification rigoureuse de la théorie cinétique des gaz à partir du principe fondamental de la dynamique, dû à Newton, pour un grand nombre de sphères identiques interagissant par collisions binaires élastiques, est un problème formulé par Hilbert en 1900 (6^{e} problème). En 1975, Lanford a démontré la validité de l'équation de Boltzmann sur un intervalle de temps très court, de l'ordre d'une fraction du laps de temps moyen entre deux collisions successives subies par une même particule. Ce résultat de Lanford peut être interprété comme une sorte de « loi des grands nombres » lorsque le nombre de particules tend vers l'infini. Ce point de vue pose plusieurs questions.

D'abord, le cœur de l'argument utilisé par Boltzmann pour aboutir à l'équation portant son nom est l'hypothèse que deux particules sur le point d'entrer en collision sont presque indépendantes statistiquement. Ceci suggère d'examiner la validité de cette hypothèse en étudiant la dynamique des corrélations entre particules. D'autre part, l'interprétation de l'équation de Boltzmann comme loi des grands nombres conduit à étudier précisément les fluctuations de la mesure empirique dans l'espace des phases autour de sa moyenne (dont l'évolution est décrite par l'équation de Boltzmann). Une série d'articles récents de T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond et S. Simonella répond à ces diverses questions et permet d'aller au-delà de l'équation de Boltzmann dans la compréhension de la théorie cinétique des gaz.

Ben Krause. — *Pointwise Ergodic Theory: Examples and Entropy* [*after Jean Bourgain*]
In this talk, we will explain how Bourgain combined elementary computations with a deep understanding of the entropic method to prove his pointwise ergodic theorem. The focus throughout will be on the intuition and heuristic which led him to his proof.

Silvain Rideau-Kikuchi. — *Sur un théorème de Lang–Weil tordu [d'après E. Hrushovski, K. V. Shuddhodan et Y. Varshavsky]*
Le théorème d'approximation de Lang–Weil donne une estimation du nombre de points dans une variété V (géométriquement intègre) sur un corps fini F : il y en a de l'ordre de $|F|^d$ où d est la dimension de la variété V. Puisque F est le corps fixé d'un automorphisme de Frobenius ϕ, cette question peut se reformuler comme celle d'estimer le nombre de points dans l'intersection de la diagonale de V^2 avec le graphe de ϕ. Dans cet exposé, nous considérerons une généralisation, due à Hrushovski, de cet énoncé à d'autres variétés que la diagonale et nous exposerons les ingrédients d'une preuve récente par Shuddhodan et Varshavsky.

Nous exposerons aussi certaines des nombreuses conséquences de cet énoncé en dynamique algébrique, ainsi qu'en théorie des modèles. L'une d'entre elle, particulièrement frappante, est que, de même qu'Ax avait pu, grâce aux estimations de Lang–Weil, donner une caractérisation de la « théorie des corps finis », ces estimations tordues permettent de caractériser la « théorie des automorphismes de Frobenius » et de montrer que c'est la théorie d'un automorphisme générique.

Gabriel Dospinescu. — *La conjecture du facteur direct [d'après Y. André et B. Bhatt]*
La conjecture du facteur direct de Hochster (énoncée dans les années 70) est un énoncé d'algèbre commutative de nature apparemment anodine : si B est une extension finie d'un anneau commutatif noethérien régulier A, alors A est un facteur direct de B en tant que A-module. Cette conjecture fait partie d'un faisceau de conjectures connues sous le nom de « conjectures homologiques », avec des implications frappantes en géométrie algébrique. Après la percée de Raymond C. Heitmann en 2002, qui a démontré la conjecture pour $\dim A \leqslant 3$, Yves André a démontré la conjecture du facteur direct en 2016. Peu de temps après Bhargav Bhatt a fourni une preuve plus simple. Les deux démonstrations utilisent de manière cruciale la théorie des espaces perfectoïdes de Peter Scholze, et le but de l'exposé est d'expliquer les principaux ingrédients de la preuve, ainsi que les raffinements obtenus ultérieurement par André et Bhatt.

Mylène Maïda. — *Strong convergence of the spectrum of random permutations and almost-Ramanujan graphs [after C. Bordenave and B. Collins]*
A finite graph is said to be *Ramanujan* if the spectral gap of its adjacency matrix is maximal, which makes it an excellent expander graph. From a family of random permutations, Bordenave and Collins construct a sequence of random graphs that are *almost-Ramanujan*. This property can in this case be reformulated in terms of *strong convergence* in free probability theory. The talk will be an opportunity to present known results on strong convergence and some of their applications. We will also insist on an important tool for their proof, the *non-backtracking* operator associated to the weighted adjacency operator of a graph. We will explain the link between the spectrum of the two operators and discuss the use of the *non-backtracking* operator in the study of random graphs.

Mikael de la Salle. — *Algèbres de von Neumann, produits tensoriels, corrélations quantiques et calculabilité* [*d'après Ji, Natarajan, Vidick, Wright et Yuen*]
En 1976, Connes demande si toute algèbre de von Neumann finie se plonge dans un ultraproduit d'algèbres de matrices. En 1980, Tsirelson demande si, dans la formulation mathématique de la mécanique quantique, autoriser des espaces de Hilbert de dimension infinie change fondamentalement le modèle. En 1993, Kirchberg conjecture que le produit tensoriel de deux copies de la C^*-algèbre pleine du groupe libre de rang infini dénombrable peut être muni d'une unique norme de C^*-algèbre. De manière surprenante et non triviale, ces trois problèmes sont en fait équivalents, c'est maintenant bien compris. Ces problèmes viennent d'être résolus, par la négative, avec des méthodes d'informatique : calculabilité, complexité, et informatique quantique. Je ferai de mon mieux pour raconter les grandes lignes de cette très longue preuve.

Étienne Ghys. — *Le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension* 2 *qui respectent l'aire et l'orientation n'est pas un groupe simple* [*d'après D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière et S. Seyfaddini*]
Depuis la fin des années 1970, on sait que la composante neutre du groupe des difféomorphismes à support compact d'une variété connexe est un groupe simple. Dans le cas des difféomorphismes qui préservent une forme volume ou une forme symplectique, on dispose d'un résultat analogue : il a alors un sous-groupe distingué « évident » qui est simple. Pour les homéomorphismes qui respectent le volume, la situation est comprise lorsque la dimension est supérieure ou égale à 3. Le cas des surfaces, et tout particulièrement de la sphère de dimension 2, a résisté à de nombreux efforts depuis une quarantaine d'années. Le théorème de D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière et S. Seyfaddini est une surprise : le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension 2 qui respectent l'aire et l'orientation n'est *pas* un groupe simple. La démonstration est un tour de force et fait largement usage de l'homologie de Floer périodique. J'essaierai de présenter le contexte ainsi que les grandes lignes de ce beau résultat.

Jonathan Hickman. — *Pointwise convergence for the Schrödinger equation* [*after Xiumin Du and Ruixiang Zhang*]
For an initial datum $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, consider the linear Schrödinger equation

$$\begin{cases} iu_t - \Delta_x u = 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

In 1980, Carleson asked which additional conditions on f guarantee

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \qquad \text{for almost every } x \in \mathbf{R}^n. \tag{$\star$}$$

More precisely, what is the minimal Sobolev regularity index s such that ($\star$) holds whenever $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$?

Whilst the $n = 1$ case was fully understood by the early 1980s, in higher dimensions the situation is much more nuanced. Nevertheless, a recent series of dramatic developments brought about an almost complete resolution of the problem. First Bourgain (2016) produced a subtle counterexample demonstrating that pointwise convergence can fail for certain $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$ with $s < \frac{n}{2(n+1)}$. Complementing this, convergence was then shown to hold for $s > \frac{n}{2(n+1)}$ when $n = 2$ in a landmark paper of Du, Guth and Li (2017) and later in all dimensions in equally important work of Du and Zhang (2019).

This seminar will explore the positive result of Du and Zhang (2019). The argument combines sophisticated modern machinery from harmonic analysis such as the multilinear Strichartz estimates of Bennett, Carbery and Tao (2006) and the ℓ^2 decoupling theory of Bourgain and Demeter (2015). However, equally important are a variety of elementary guiding principles, rooted in Fourier analysis, which govern the behaviour of solutions to the Schrödinger equation. The talk will focus on these basic Fourier analytic principles, building intuition and presenting a powerful toolbox for tackling problems in modern PDE and harmonic analysis.

Clara Löh. — *Exponential growth rates in hyperbolic groups* [*after Koji Fujiwara and Zlil Sela*]
A classical result of Jørgensen and Thurston shows that the set of volumes of finite volume complete hyperbolic 3-manifolds is a well-ordered subset of the real numbers of order type ω^ω; moreover, they showed that each volume can only be attained by finitely many isometry types of hyperbolic 3-manifolds.

Fujiwara and Sela established a group-theoretic companion of this result: If Γ is a non-elementary hyperbolic group, then the set of exponential growth rates of Γ is well-ordered, the order type is at least ω^ω, and each growth rate can only be attained by finitely many finite generating sets (up to automorphisms).

In this talk, I will outline this work of Fujiwara and Sela and discuss related results.

Matteo Viale. — *Strong forcing axioms and the continuum problem* [*after Asperó's and Schindler's proof that* $\mathbf{MM}^{++}$ *implies Woodin's Axiom* $(*)$]
A topological approach to forcing axioms considers them as strong forms of the Baire category theorem; an algebraic approach describes certain properties of "algebraic closure" for the universe of sets that can be derived from them. Our goal is to show how the theorem of Aspéro and Schindler links the geometric and algebraic points of view. Drawing on Gödel's program, we connect these mathematical results to the philosophical debate on what could constitute a viable solution of the continuum problem.

Anne-Laure Dalibard. — *Non-unicité des solutions du système de Navier–Stokes avec terme source* [*d'après Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo*]
La dynamique des fluides visqueux incompressibles est décrite par les équations de Navier–Stokes, pour lesquelles on dispose principalement de deux façons de construire des solutions en dimension trois. La première, due à Leray et étendue par Hopf, repose sur une méthode de compacité, et conduit à l'existence de solutions dites « faibles », globales (c'est-à-dire définies pour tout temps). La seconde, due initialement à Fujita et Kato et généralisée ensuite, consiste à construire des solutions dites « fortes » par une méthode de point fixe, dans un espace fonctionnel à forte régularité. Les solutions fortes ainsi obtenues sont naturellement uniques, mais sont a priori locales. Cette dichotomie conduit naturellement à la question suivante, restée ouverte pendant presque un siècle : les solutions de Leray–Hopf sont-elles uniques ?

Récemment, Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo ont apporté une réponse négative à cette question fondamentale, en considérant le cas d'un fluide initialement au repos et soumis à une force extérieure. Leur preuve repose sur la construction d'un profil linéairement instable dans des variables auto-similaires et s'inspire d'un résultat de Vishik pour l'équation d'Euler, ainsi que des travaux de Sverak et de ses collaborateurs.

Daniel Juteau. — *Catégories tensorielles symétriques en caractéristique positive* [*d'après Kevin Coulembier, Pavel Etingof, Victor Ostrik...*]
Le formalisme tannakien a d'abord été développé par l'école de Grothendieck pour les besoins de la théorie des motifs. L'idée principale est que se donner un groupe (algébrique affine sur un corps k, disons algébriquement clos) est essentiellement équivalent à se donner sa catégorie de représentations en tant que catégorie monoïdale symétrique, munie du foncteur d'oubli (dit foncteur fibre) vers la catégorie des espaces vectoriels : une catégorie pré-tannakienne (monoïdale symétrique, et vérifiant des conditions nécessaires naturelles) admettant un « foncteur fibre » est forcément équivalente à la catégorie des représentations du groupe des automorphismes tensoriels du foncteur fibre.

Dans le cas de la caractéristique 0, Deligne a montré en 1990 qu'une catégorie pré-tannakienne $\mathscr{C}$ admet un foncteur fibre (*i.e.* est tannakienne) si et seulement si tout objet a une puissance alternée qui est nulle. En 2002, il a montré un résultat plus général : si on suppose seulement que $\mathscr{C}$ est à croissance modérée (pour tout objet V, la longueur de $V^{\otimes n}$ est sous-exponentielle), alors $\mathscr{C}$ a une sorte de foncteur fibre, non pas vers les espaces vectoriels a priori, mais vers les super espaces vectoriels (espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués).

L'extension de ces résultats au cas où k est de caractéristique $p > 0$ a été un problème ouvert pendant une vingtaine d'années, mais de grands progrès ont été faits récemment. En particulier, Ostrik a identifié une catégorie de Verlinde Ver_p comme but naturel des « foncteurs fibres » en caractéristique p. Plus récemment, Coulembier, Etingof et Ostrik ont donné une certaine réponse à notre question : ils ont caractérisé les catégories pré-tannakiennes admettant un foncteur tensoriel symétrique vers Ver_p comme celles qui sont Frobenius-exactes et de croissance modérée (cette dernière condition pouvant être remplacée par : tout objet est annulé par une puissance alternée). Un cas particulier, qui est aussi une étape importante dans la preuve, est une caractérisation des catégories tannakiennes en caractéristique p. Nous donnerons un aperçu de ces résultats, ainsi que des exemples d'applications aux représentations modulaires.

Vincent Tassion. — *Rotation invariance for planar percolation* [*after Hugo Duminil-Copin, Karol Kajetan Kozlowski, Dmitry Krachun, Ioan Manolescu, and Mendes Oulamara*]
We consider critical percolation on the square lattice $\mathbb{Z}^2$, seen as a graph: For each edge, we flip a coin, the edge is kept with probability $1/2$, otherwise it is deleted, independently of the other edges. This gives rise to a random subgraph of $\mathbb{Z}^2$. The law of this random subgraph is invariant under $\pi/2$-rotation, because it inherits the symmetries of the lattice. But if we consider the large connected components, new symmetries emerge: Hugo Duminil-Copin, Karol Kajetan Kozlowski, Dmitry Krachun, Ioan Manolescu, and Mendes Oulamara have shown that the law of these components is asymptotically invariant under all rotations. This result constitutes a major advance towards the understanding of critical phenomena in planar statistical mechanics: the main conjecture in the field is that the law of large connected components is in fact invariant under conformal transformations, and it satisfies a universality principle: this asymptotic law does not depend on the underlying lattice. In this talk we will give a rigorous meaning to these statements, and then discuss some essential aspects: what role does the parameter $1/2$ play? What heuristic reasons justify the emergence of symmetries? What are the main ideas for invariance by rotation?

Séminaire BOURBAKI Novembre 2022
74e année, 2022–2023, no 1197, p. 1 à 27
doi: 10.24033/ast.1206

THE UNBOUNDED DENOMINATORS CONJECTURE
[*after* F. Calegari, V. Dimitrov, and Y. Tang]

by **Javier Fresán**

Introduction

This written account of my talk at the Bourbaki seminar surveys some of the ideas in the beautiful proof by Calegari, Dimitrov, and Tang (2021) of the unbounded denominators conjecture, a long standing open problem in the theory of modular forms that gives a simple criterion to decide whether a modular form with algebraic Fourier coefficients at infinity is "invariant" under a congruence subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ or not.

Throughout, we write $\overline{\mathbf{Q}}$ for the algebraic closure of $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{C}$ and $\overline{\mathbf{Z}} \subset \overline{\mathbf{Q}}$ for the subring of algebraic integers. We let $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ denote the upper half-plane and[(1)] $q = \exp(\pi i \tau)$. Recall that $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ acts on $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbf{Q})$ by Möbius transformations and that *congruence subgroups* of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ are those containing

$$\Gamma(M) = \ker\big(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})\big) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid A \equiv I \bmod M\}$$

for some integer $M \geqslant 1$. The *unbounded denominators conjecture*, originating from work of Atkin and Swinnerton-Dyer (1971), is now the following theorem:

Theorem 0.1 (Calegari–Dimitrov–Tang, 2021). *Let $f(\tau)$ be a holomorphic function on the upper-half plane $\mathfrak{H}$ such that*

(*a*) *there exists an integer k and a subgroup $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ of finite index such that*

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \tag{1}$$

holds for all matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in Γ;

(*b*) *f locally extends to a meromorphic function around each point of $\mathbb{P}^1(\mathbf{Q})$;*

(*c*) *f admits a Fourier expansion in $\overline{\mathbf{Z}}[\![q^{1/N}]\!]$ for some integer $N \geqslant 1$.*

Then the equality (1) *holds for all matrices in a congruence subgroup of* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

(1) One reason for choosing this unusual convention for q will be explained in remark 0.2 below.