Séminaire BOURBAKI Juin 2023
74e année, 2022–2023, nº 1209, p. 453 à 480
doi : 10.24033/ast.1218

CATÉGORIES TENSORIELLES SYMÉTRIQUES EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE
[*d'après* Kevin Coulembier, Pavel Etingof, Victor Ostrik...]

par **Daniel Juteau**

> [...] J'ai fini par comprendre comment la notion de motif fournissait la clef d'une compréhension de ce mystère — comment, par le seul fait de la présence d'une catégorie (ici celle des motifs « lisses » sur un schéma de base donné, par exemple les motifs sur un corps de base donné), ayant des structures internes similaires à celles qu'on trouve sur la catégorie des représentations linéaires d'un pro-groupe algébrique sur un corps $\Bbbk$ (le charme de la notion de pro-groupe algébrique m'ayant été révélé précédemment par Serre également), on arrive à reconstituer bel et bien un tel progroupe (dès qu'on dispose d'un « foncteur fibre » convenable), et à interpréter la catégorie « abstraite » comme la catégorie de ses représentations linéaires.
>
> Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles* (II.B.IV.1).

Introduction

Considérons $\mathbf{G}$ un groupe algébrique (voire pro-algébrique) sur un corps $\Bbbk$ (que nous supposerons algébriquement clos pour simplifier), ainsi que la catégorie $\mathscr{C} = \operatorname{Rep}_{\Bbbk} \mathbf{G}$ des représentations linéaires de $\mathbf{G}$ sur des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie. Quelles sont donc ces structures internes de $\mathscr{C}$ mentionnées par Grothendieck ?

(1) $\mathscr{C}$ est $\Bbbk$-linéaire, abélienne. [(1)]

(2) Tous les objets de $\mathscr{C}$ sont de longueur finie et tous les espaces de morphismes sont de dimension finie.

[(1)] Pour une référence générale sur les catégories, *cf.* MacLane, 1971.

(3) $\mathscr{C}$ est **monoïdale** : elle est munie d'un bifoncteur ($\Bbbk$-bilinéaire) $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, d'un isomorphisme de foncteurs

$$\alpha\colon (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -),$$

dit contrainte d'associativité, vérifiant une condition de cohérence (axiome du pentagone), et d'un objet unité $\mathbf{1}$ tel que $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \simeq \mathbf{1}$ et que les foncteurs $\mathbf{1} \otimes -$ et $- \otimes \mathbf{1}$ sont des équivalences.

(4) $\mathscr{C}$ est **tressée** : on a des isomorphismes fonctoriels $c_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$, compatibles avec α (axiomes de l'hexagone).

(5) $\mathscr{C}$ est **symétrique** : le tressage c vérifie $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$.

(6) $\mathscr{C}$ est **rigide** : tout objet X est dualisable, *i.e.* il admet un dual [(2)] X^* muni de morphismes $\mathrm{ev}_X\colon X^* \otimes X \to \mathbf{1}$ et $\mathrm{coev}_X\colon \mathbf{1} \to X \otimes X^*$, tels que les composés

$$(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}_X) \circ (\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X)\colon X \longrightarrow X \otimes X^* \otimes X \to X,$$
$$(\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X)\colon X^* \longrightarrow X^* \otimes X \otimes X^* \to X^*$$

sont l'identité de X et de X^* respectivement.

(7) $\mathscr{C}$ admet un **foncteur fibre** $F\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$, à savoir le foncteur d'oubli, à valeurs dans la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie (muni du produit tensoriel usuel, avec les contraintes d'associativité et de commutativité évidentes). Cela veut dire que c'est un foncteur exact, monoïdal (préservant l'unité et muni d'un isomorphisme fonctoriel $J\colon F(X) \otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$ compatible aux contraintes d'associativité et aux unités) et symétrique (on demande que J soit aussi compatible aux contraintes de commutativité). Il résulte de la rigidité qu'un tel foncteur est automatiquement fidèle.

Une **catégorie tensorielle symétrique** (sur $\Bbbk$) est une catégorie monoïdale symétrique rigide, abélienne et $\Bbbk$-linéaire (avec un produit tensoriel $\Bbbk$-bilinéaire).

Si de plus on a $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = \Bbbk$ et que tous les objets sont de longueur finie, on dira que c'est une catégorie **prétannakienne**.

Une catégorie prétannakienne munie d'un foncteur fibre à valeurs dans $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ est dite **tannakienne**. [(3)] Un résultat fondamental du formalisme est que toute catégorie tannakienne est en fait une catégorie de représentations pour un schéma en groupes affine.

[(2)] Notons que la définition de dual ci-dessus est celle d'un dual à gauche (qui signifie que le foncteur $X^* \otimes -$ est adjoint à gauche du foncteur $X \otimes -$) ; en fait, la rigidité demande des duaux à gauche et à droite, mais dans le cas tressé (voire symétrique), un dual à gauche est aussi naturellement un dual à droite en utilisant la contrainte de commutativité.

[(3)] Il faudrait préciser : tannakienne neutre. La notion de catégorie tannakienne est plus générale (le foncteur fibre pouvant être à valeurs dans Mod_A, pour A une $\Bbbk$-algèbre), mais en fait, dans la suite, la plupart du temps nous supposerons $\Bbbk$ algébriquement clos et on ne s'intéressera qu'au cas neutre ; par conséquent, nous dirons simplement catégorie tannakienne pour cette notion. Voir (Deligne et Milne, 1982, §2 et 3) pour une discussion détaillée des foncteurs fibres.

Théorème 0.1 (Deligne et Milne, 1982; Saavedra Rivano, 1972). *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie tannakienne sur $\Bbbk$, avec foncteur fibre $F\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$. Alors le foncteur qui à une $\Bbbk$-algèbre R associe le groupe des automorphismes tensoriels symétriques de $F_R\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Mod}_R$, $X \mapsto F(X) \otimes_{\Bbbk} R$ est représentable par un $\Bbbk$-schéma en groupes affine $\mathbf{G} := \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(F)$.*

De plus, le foncteur fibre F se factorise par une équivalence (tensorielle symétrique) suivie du foncteur d'oubli :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathrm{Rep}_{\Bbbk}\,\mathbf{G}\,. \arrow[dl, "\omega"] \\ & \mathrm{Vec}_{\Bbbk} & \end{tikzcd}$$

La terminologie « foncteur fibre » s'explique par le cas où $\mathscr{C}$ est la catégorie des $\Bbbk$-systèmes locaux sur un espace topologique X raisonnable : pour chaque point $x \in X$, on a un « foncteur fibre au point x », sur lequel le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ agit. On a alors une équivalence de catégories monoïdales symétriques entre les systèmes locaux de rang fini et les représentations de $\pi_1(X, x)$. Attention, si on applique la reconstruction tannakienne dans le cadre linéaire comme ci-dessus, on ne retrouve pas $\pi_1(X, x)$, mais seulement sa complétion proalgébrique (un schéma en groupes affine est toujours limite projective de groupes algébriques). Un précurseur était la théorie de Galois–Grothendieck du groupe fondamental, où on regarde plutôt les revêtements finis et des actions de $\pi_1(X, x)$ sur des ensembles finis (ou plutôt des actions continues de son complété profini). On voit que dans ce cas le groupe fondamental est bien défini à un automorphisme intérieur près. L'objet plus canonique serait le groupoïde fondamental ; les isomorphismes entre deux foncteurs fibres $\pi(X, x)$ et $\pi(X, y)$ sont décrits par le torseur $\pi_1(X, x, y)$ des chemins à homotopie près de x à y.

Le « rêve des motifs » de Grothendieck avait plusieurs sources et motivations : notamment la géométrie énumérative, la recherche d'un invariant cohomologique universel à coefficients dans $\mathbb{Q}$ factorisant toutes les cohomologies de Weil, et la théorie de Galois (André, 2004). Grothendieck ne s'est pas laissé abattre par l'argument bien connu de Serre montrant qu'on ne peut pas avoir d'invariant cohomologique prenant ses valeurs dans $\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ (en considérant les endomorphismes de courbes elliptiques super-singulières en caractéristique $p > 0$) : il a imaginé qu'il puisse exister une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire, avec les structures appropriées, qui fasse l'affaire ; notamment, il faut pouvoir exprimer la propriété de Künneth, donc il faut avoir un produit tensoriel. Les différents foncteurs de réalisation des motifs donnant les différentes cohomologies classiques sont des foncteurs fibres. Cette approche donne lieu à un groupe de Galois motivique, vaste généralisation de la théorie de Galois en dimension supérieure.

En plus de fournir le cadre conceptuel pour la théorie des motifs, les catégories tensorielles symétriques sont intéressantes à bien des égards. Chacune de ces catégories donne un cadre où on peut faire de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique : ainsi, on peut donner un sens à la notion de schéma en groupes affine dans une telle catégorie ; par exemple, si on remplace la catégorie $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ par celle des super-espaces vectoriels $\mathrm{sVec}_{\Bbbk}$, on obtient les notions de super-groupe algébrique, de super-algèbre de Lie, etc. On peut aussi dire, comme Etingof, que dans un premier temps, on peut faire de la théorie des représentations sans groupes (groupes quantiques, etc), puis même sans espaces vectoriels. Vu le théorème de reconstruction tannakienne, on peut voir les catégories tensorielles symétriques comme des généralisations des groupes (pro)algébriques.

Un problème naturel est de tenter de classifier ces catégories tensorielles symétriques. On a vu que beaucoup d'entre elles peuvent être décrites comme les représentations d'un groupe. Comment caractériser ces catégories tannakiennes, parmi toutes les autres ? En caractéristique 0, une réponse élégante a été donnée par Deligne (1990), puis dans le cas super : Deligne (2002, 2011). Des exemples non (super-)tannakiens ont aussi été étudiés (Deligne, 2007 ; Harman et Snowden, 2022 ; Knop, 2007).

En caractéristique $p > 0$, des exemples de catégories non super-tannakiennes, et pourtant à croissance modérée (*cf.* §1.3), étaient connus (Gelfand et Kazhdan, 1992 ; Georgiev et Mathieu, 1994) : il s'agit des catégories Ver_p. Mais pendant longtemps, il n'était pas clair comment on pourrait obtenir un analogue du critère de Deligne en caractéristique p. Ces dernières années, d'énormes progrès ont été accomplis. Il est naturel de chercher à caractériser les catégories Ver_p-tannakiennes (admettant un « foncteur fibre » vers Ver_p). Sans surprise, un mot clé est Frobenius. On peut définir plusieurs foncteurs tâchant d'imiter le twist de Frobenius des représentations des groupes réductifs en caractéristique p. Il s'avère que la notion de catégorie Frobenius-exacte (pour laquelle un de ces foncteurs de Frobenius, peu importe lequel, est exact) est cruciale et apparaît dans les critères dégagés par Coulembier, Etingof et Ostrik (2023b) pour caractériser les catégories Ver_p-tannakiennes. Mais l'histoire ne s'arrête pas là : Benson et Etingof (2019) et Benson, Etingof et Ostrik (2023) dévoilent une richesse foisonnante insoupçonnée parmi ces catégories tensorielles symétriques en caractéristique p, et il y a bien sûr encore beaucoup de questions ouvertes.

Dans la section 1, nous commencerons de manière très naïve, en approchant la notion de dimension de façon intrinsèque à partir de la structure monoïdale symétrique, car cela donne beaucoup de conditions pour pouvoir être une catégorie (super-)tannakienne. Au fur et à mesure, nous verrons des exemples et contre-exemples. Puis dans la section 2, nous rappellerons les résultats connus en caractéristique 0. Dans la section 3, nous expliquerons la procédure de semi-simplification, qui permet de définir la catégorie Ver_p. Dans la section 4, nous parlerons des différents foncteurs de Frobenius et d'un analogue (partiel) au théorème de Deligne en caractéristique p, dans le cas des catégories Frobenius-exactes. Dans la section 5, nous décrirons les nouvelles catégories tensorielles symétriques découvertes récemment, qui ne sont ni semi-simples ni Frobenius-exactes, et mentionnerons une conjecture qui nous dit que cette liste pourrait suffire pour décrire, via le formalisme tannakien, toutes les catégories tensorielles symétriques à croissance modérée en caractéristique p. Enfin, dans la section 6, nous verrons des applications aux représentations modulaires des groupes finis.

1. Dimensions

Comment pouvons-nous décrire la dimension d'un espace vectoriel V dans $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$, uniquement en termes de la structure tensorielle symétrique de cette catégorie ? En réalité, plusieurs moyens sont à notre disposition et cela donnera lieu à plusieurs notions de « dimension » dans une catégorie tensorielle symétrique $\mathscr{C}$ quelconque. Ces notions seront préservées par les foncteurs tensoriels symétriques ; nous obtiendrons donc des conditions nécessaires sur $\mathscr{C}$ pour qu'elle soit tannakienne.

1.1. La trace de l'identité

Première idée : la dimension, c'est la trace de l'identité ! Dans $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$, la coévaluation $\mathrm{coev}_V \colon \Bbbk \to V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ envoie 1 sur id_V et l'évaluation $\mathrm{ev}_V \colon \mathrm{End}_{\Bbbk}(V) \simeq V^* \otimes V \to \Bbbk$ s'interprète comme la trace. Cela nous suggère comment définir la trace d'un endomorphisme dans une catégorie tensorielle symétrique générale.

Définition 1.1. On définit la trace d'un endomorphisme $f \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$ par

$$\mathrm{Tr}\, f = \mathrm{ev}_X \circ c_{X,X^*} \circ (f \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ \mathrm{coev}_X \in \mathrm{End}(\mathbf{1}) = \Bbbk,$$

et en particulier la dimension de X par

$$\dim(X) := \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_X) \in \Bbbk.$$

Voilà un bel invariant, conservé par tout foncteur tensoriel symétrique ! Ah oui… Un bémol : il est à valeurs dans $\Bbbk$. Donc c'est très bien si $\Bbbk$ est de caractéristique 0, mais s'il est de caractéristique p on n'a accès qu'à la dimension modulo p. En tout cas, si $\dim(X)$ n'est pas l'image d'un entier naturel dans $\Bbbk$, c'est très clairement une obstruction à l'existence d'un foncteur fibre.

Voici un exemple basique qui ne vérifie pas cette condition, si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0 : la catégorie $\mathrm{sVec}_{\Bbbk}$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2$-gradués $V = V_0 \oplus V_1$, avec composante paire V_0 et composante impaire V_1 de dimension finie, munie du