BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE ARNOUX
GÉRARD RAUZY

Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 2 (1991), p. 199-215
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_199_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 199–215.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE SUITES DE COMPLEXITÉ 2n + 1

PAR

PIERRE ARNOUX ET GÉRARD RAUZY (*)

RÉSUMÉ. — On montre que toute suite minimale de complexité $2n+1$ satisfaisant à une certaine condition combinatoire peut être représentée par un échange de six intervalles, ce qui généralise le résultat classique sur la représentation des suites sturmiennes par les rotations.

ABSTRACT. — We prove that all minimal sequences of complexity $2n+1$, satisfying to a combinatorial condition, can be represented by an interval exchange on six intervals; this generalizes a classical result on representation of sturmian sequences by rotations.

0. Introduction et exposé du résultat

Quand on étudie un système dynamique (X, T), il est souvent intéressant de considérer une partition finie bien choisie $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de X et les *itinéraires* des points de X pour cette partition, c'est-à-dire les suites $(\nu(T^n x))_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\nu(x) = \alpha$ si $x \in A_\alpha$, qui décrivent les positions des itérés d'un point par rapport à la partition ; l'existence d'une telle partition finie associant à chaque point un itinéraire distinct est assurée, dans le cas d'entropie finie, par un résultat de KRIEGER (cf. [Kr]). Si l'on note Ω l'adhérence de ces suites dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, il est facile de vérifier que Ω est invariant par le décalage S qui envoie la suite (x_n) sur la suite (y_n) définie par $y_n = x_{n+1}$, et que l'application qui à un point de X fait correspondre son itinéraire est une semi-conjugaison entre (X, T) et le système dynamique symbolique (Ω, S).

(*) Texte reçu le 5 décembre 1990, révisé le 11 mars 1991.
P. ARNOUX, Université de Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.
G. RAUZY, Faculté des Sciences de Luminy, DMI, 70 route Léon Lachamp, case 901, 13008 Marseille, France.

On peut donner comme exemples classiques les automorphismes hyperboliques du tore, munis d'une partition markovienne, qui sont conjugués de cette façon à des sous-shifts de type fini, ou encore la rotation $R_\alpha : [0,1[\to [0,1[\quad x \mapsto (x+\alpha) \bmod 1$, munie de la partition $[0,1-\alpha[$, $[1-\alpha,1[$, qui est conjuguée au système symbolique engendré par une suite sturmienne (voir plus bas).

Nous nous intéressons ici au problème inverse : étant donné un système dynamique symbolique (Ω,S) dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, est-il possible d'en donner une interprétation géométrique? Nous dirons qu'un système (X,T) et une partition finie de X indexée par $\mathcal{A}$ *représentent* le système (Ω,S) si les itinéraires des points de X par rapport à cette partition sont denses dans Ω (on ne peut pas demander que l'application soit surjective, pour des raisons topologiques : il y a en général des "itinéraires impropres" analogues aux développements décimaux impropres des nombres réels).

Notations et définitions.

Commençons d'abord par fixer quelques notations : $\mathcal{A}$ étant l'ensemble fini (alphabet) utilisé, on notera $\mathcal{A}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^k$ le monoïde libre sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans $\mathcal{A}$, on appelle $L(u)$ l'ensemble des *facteurs* de u, c'est-à-dire des mots de la forme $u_i u_{i+1} \ldots u_{i+j}$. Il est immédiat que $L(u)$ est factoriel (tout facteur d'un mot de $L(u)$ est dans $L(u)$) et prolongeable à droite (si A est dans $L(u)$, il existe une lettre a telle que Aa est dans $L(u)$).

On notera $L_n(u)$ l'ensemble des facteurs de longueur n. Le cardinal de cet ensemble est particulièrement important pour notre étude :

DÉFINITION. — *On appelle* complexité *de u la suite p telle que $p(n)$ est le nombre de facteurs distincts de longueur n de u.*

A la suite u on associe le système dynamique (Ω,S), où Ω est l'adhérence de l'orbite de u par le décalage S; le langage $L(u)$ ne caractérise pas u, ni même son orbite, mais il caractérise Ω : une suite dont tous les mots initiaux sont dans $L(u)$ est forcément dans Ω, et réciproquement. On dit que la suite u est *récurrente* si elle est point d'accumulation de son orbite; il faut et il suffit pour cela que tout mot de $L(u)$ apparaisse un infinité de fois dans u, et $L(u)$ est alors prolongeable à gauche.

On dit que la suite est *minimale* si le système associé ne contient pas de fermé invariant non trivial, ou encore si tout point du système est d'orbite dense; si u est minimale, elle est évidemment récurrente. On peut donner un critère simple de minimalité sur $L(u)$: la suite est minimale si et seulement si, pour tout n, il existe N tel que tout mot de longueur N

contienne tout mot de longueur n. En effet, si U est un mot de longueur n tel que, pour tout N, il existe un mot $V_N \in L_N(u)$ ne contenant pas U, on peut, en extrayant de la suite $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convenable et en prenant des facteurs initiaux de longueur croissante de cette sous-suite, construire un élément de Ω dont tous les facteurs sont dans $L(u)$ mais qui ne contient pas U, ce qui contredit la minimalité.

Nous ne considèrerons dans la suite que des suites minimales.

Le graphe associé à une suite.

Pour une étude plus fine de la suite, on peut définir sur $L_n(u)$ des relations, pour $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$:

$$U \xrightarrow[\beta]{\alpha} V \text{ s'il existe un mot } W \text{ tel que}$$
$$U = \beta W,\ \ V = W\alpha,\ \ \beta W\alpha \in L_{n+1}(u).$$

On emploiera également la notation $U \xrightarrow{\alpha} V$ (resp. $U \xrightarrow[\beta]{} V$, $U \to V$) s'il n'est pas utile d'expliciter la lettre β (resp. α, α et β).

On notera Γ_n le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $L_n(u)$, et dont les flèches correspondent à ces relations (chaque flèche est donc associée à un élément de $L_{n+1}(u)$). Pour $U \in L_n(u)$, on notera $\partial^+ U$ (resp. $\partial^- U$) le nombre de flèches de Γ_n qui partent de U (resp. qui arrivent à U) ; il est clair que, puisque $L(u)$ est prolongeable des deux côtés, $\partial^+ U$ et $\partial^- U$ sont toujours supérieurs ou égaux à 1. Tout mot de $L_{n+k}(u)$ correspond à un unique chemin de longueur k dans le graphe, mais la réciproque est fausse en général ; par ailleurs, la minimalité du système entraîne que deux sommets du graphe peuvent toujours être joints.

Il est clair que si $\partial^+ U = 1$ pour tout U dans $L_n(u)$, le graphe se réduit à un cycle, et la suite u est périodique, de complexité constante et égale à sa période à partir d'un certain rang. Mais on vérifie que, par définition, le nombre de sommets du graphe Γ_n est égal à $p(n)$, et le nombre de flèches, $\sum_{U\in L_n(u)} \partial^+(U)$, est égal à $p(n+1)$; donc, pour une suite non périodique minimale, la complexité est une fonction strictement croissante de n.

On retrouve ainsi un résultat classique : les suites non périodiques de plus petite complexité sont les suites dites “sturmiennes”, de complexité $n+1$. On verra plus bas que ces suites sont représentées par des rotations irrationelles sur l'intervalle unité, avec une partition correspondant aux deux intervalles de continuité de la rotation.

Après les suites sturmiennes, les plus faciles à étudier sont les suites de complexité linéaire ; nous donnons dans ce qui suit une représentation d'une classe de suites de complexité $2n+1$, qui sont donc définies sur un alphabet à trois symboles que l'on notera $\{1,2,3\}$, puisque $p(1)=3$ (il existe des suites de complexité non linéaire comprise entre $n+1$ et $2n+1$, cf. [R1], mais elle sont probablement plus difficiles à représenter).

On a vu ci-dessus que :

$$\sum_{U\in L_n(u)} (\partial^+(U)-1) = p(n+1)-p(n)$$

et puisque $\partial^+(U)>0$ pour tout U et que dans notre cas $p(n+1)-p(n)=2$, on voit que, pour chaque n, il y a soit un seul U de longueur n tel que $\partial^+U=3$, soit deux mots V,W tels que $\partial^+V=\partial^+W=2$; on vérifie facilement que si, pour une longueur n on est dans le premier cas, c'est encore vrai pour les longueurs $<n$, donc à partir d'un certain rang on est toujours soit dans le premier, soit dans le second cas. La même analyse s'applique à ∂^-U, ce qui partage les suites de complexité $2n+1$ en quatre classes ; nous allons étudier celle pour laquelle on a toujours $\partial^+=\partial^-=3$:

DÉFINITION. — *On dit qu'une suite minimale u de complexité $2n+1$ satisfait la condition (*) si, pour tout n, u admet un facteur D_n de longueur n ayant trois prolongements possibles, et un facteur G_n de longueur n ayant trois antécédents possibles (avec les notations précédentes, $\partial^+D_n=3$ (resp. $\partial^-G_n=3$), et donc pour tout autre mot X, on a $\partial^+X=1$ (resp. $\partial^-X=1$)).*

THÉORÈME. — *Si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimale de complexité $2n+1$, satisfaisant à la condition (*), il existe un échange d'intervalles $f:S^1\to S^1$ défini sur six intervalles A_1,B_1,A_2,B_2,A_3,B_3 et une partition de S^1 en trois intervalles $I_i=A_i\cup B_i$ qui représentent la suite u.*

Remarque 1. — Les itinéraires évitent un nombre dénombrable de points du sous-shift (Ω,S) défini par u ; ces points correspondent à des itinéraires impropres, dus au fait qu'il y a un choix arbitraire, aux bornes des intervalles, entre la continuité à gauche et la continuité à droite pour f ; on peut faire disparaître cet arbitraire en séparant S^1 le long des orbites des discontinuités, suivant la construction de Keane (cf. [Ke]) ; on obtient alors un homéomorphisme d'un ensemble de Cantor, dont les itinéraires remplissent Ω.

Remarque 2. — Le théorème s'étend facilement aux suites de complexité $(k-1)n+1$ satisfaisant une généralisation évidente de la condition (*) (il existe un seul mot U tel que $\partial^+U=k$, et un seul mot V tel que