Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CATÉGORIES DÉRIVABLES

Denis-Charles Cisinski

Tome 138
Fascicule 3

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 317-393

Bull. Soc. math. France
138 (3), 2010, p. 317–393

CATÉGORIES DÉRIVABLES

PAR DENIS-CHARLES CISINSKI

RÉSUMÉ. — Ces notes sont consacrées à la construction de dérivateurs à partir d'une nouvelle notion de catégorie de modèles assez générale pour recouvrir les théories de Quillen, Thomason et Brown. On développe en particulier la théorie des catégories exactes dérivables (par exemple les catégories de Frobenius et les catégories biWaldhausen compliciales vérifiant de bonnes propriétés de stabilité homotopique), lesquelles donnent lieu à des dérivateurs triangulés. On donne une caractérisation combinatoire simple pour qu'un foncteur dérivé induise une équivalence de catégories (ou de dérivateur). Dans un dernier temps, on démontre que la notion de catégorie de modèles introduite ici est stable par passage aux catégories de préfaisceaux sur une petite catégorie arbitraire, propriété qui fait défaut à la structure de Quillen.

ABSTRACT (*Derivable categories*). — These notes are devoted to the construction of derivators from a new notion of model category which is general enough to recover the theories of Quillen, Thomason, and Brown. We develop, in particular, the theory of derivable exact categories (for instance, Frobenius categories or complicial biWaldhausen categories with nice homotopy stability properties), which give rise to triangulated derivators. We give a simple combinatorial characterization for a derived functor to induce an equivalence of categories (or of derivators). At last, we prove that the notion of model category we introduce here is stable by taking presheaf categories over an arbitrary small category, while this property is known to fail for the Quillen structure.

Texte reçu le 23 juillet 2008, accepté le 11 décembre 2009

DENIS-CHARLES CISINSKI, LAGA, CNRS (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* `cisinski@math.univ-paris13.fr` • *Url :* `http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/`

Classification mathématique par sujets (2000). — 55U35 ; 55U40, 18G55, 18G10.

Mots clefs. — Catégories de modèles, limites homotopiques, dérivateurs, catégories stables, équivalences dérivées.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2010/317/$ 5.00

Introduction

La notion de catégorie de modèles a été introduite par Quillen dans son fameux livre *Homotopical algebra* [29], afin de définir un cadre permettant de « faire de la théorie de l'homotopie » dans des catégories autres que celle des espaces topologiques, généralisant au contexte non-additif l'algèbre homologique (ce par quoi on entend la théorie des catégories dérivées, telle qu'introduite par Grothendieck et Verdier). Le formalisme de Quillen s'est révélé un outil puissant, en topologie algébrique d'abord (sa raison d'être étant de formaliser la théorie de Quillen, de classification des types d'homotopie rationnels), puis dans bien d'autres domaines (par exemple, la K-théorie algébrique, la théorie des opérades), jusqu'à des développements récents spectaculaires, comme la théorie de l'homotopie des schémas de Morel et Voevodsky, ou encore, la théorie des catégories supérieures et la géométrie algébrique dérivée, telles que développées par Toën, Vezzosi et Lurie.

La notion de catégorie de modèles de Quillen est extrêment robuste : toute théorie de l'homotopie peut être décrite par une catégorie de modèles de Quillen (dans le sens où, dans la plupart des cas, toute catégorie dans laquelle on veut faire de l'algèbre homotopique peut être munie d'une telle structure, et, lorsque ce n'est pas le cas, elle peut être plongée dans une catégorie admettant une structure de Quillen). Cependant, un certain nombre de constructions naturelles ne sont disponibles que moyennant des hypothèses restrictives : l'exemple poursuivi dans ces notes étant celui des catégories de diagrammes. En effet, étant donnée une catégorie de modèles de Quillen $\mathscr{C}$ et une petite catégorie I, on ne sait pas, sans hypothèses supplémentaires, définir une structure de catégorie de modèles sur la catégorie des préfaisceaux sur I à valeurs dans $\mathscr{C}$. Cela complique par exemple la construction des limites homotopiques : alors que la théorie de Quillen est un outil puissant pour construire des foncteurs dérivés, on ne peut pas l'utiliser directement pour construire le foncteur limite projective homotopique, lequel est pourtant bien le foncteur dérivé à droite du foncteur limite projective (cela dit, les limites homotopiques existent bel et bien en toute généralité, mais au prix d'un certain effort ; voir [2, 3, 9]).

L'une des visées de ces notes est d'introduire une notion de catégorie de modèles stable par passage aux catégories de préfaisceaux, de sorte de que le foncteur limite projective soit compatible à ces structures. Pour cela, on définit des structures plus faibles, que l'on enrichira au cours du texte. L'intérêt de cette progression lente est double : d'une part, les énoncés démontrés ici sont des outils fondamentaux en dehors de l'algèbre homotopique abstraite (en K-théorie par exemple), et, d'autre part, cela permet de comprendre quel est le rôle de chacun des axiomes que l'on introduira pour définir une bonne notion de catégorie de modèles.

On développe donc tout d'abord la notion de *catégorie dérivable* (à gauche et/ou à droite), c'est-à-dire d'une notion de catégorie de modèles recouvrant à la fois la théorie des catégories de modèles (fermées ou non) au sens de Quillen [10, 20, 29], celle des catégories de modèles au sens de Thomason [34], et celle des catégories d'objets fibrants au sens de Brown [1]. Notons au passage que la notion de catégorie dérivable est un cas particulier de celle de *structure de dérivabilité*, définie et étudiée par Kahn et Maltsiniotis dans [21], et donne donc lieu à une bonne théorie des foncteurs dérivés.

Il est établi dans ce travail que toute catégorie dérivable à gauche définit canoniquement un dérivateur à gauche (de domaine les catégories directes finies) vérifiant de bonnes propriétés de relèvement (2.21, 2.15) ; autrement dit, les catégories dérivables à gauche admettent des limites homotopiques finies. On développe en outre les propriétés de fonctorialité attendues (3.4), ainsi qu'une caractérisation combinatoire simple des foncteurs exacts à gauche entre catégories dérivables à gauche induisant une équivalence entre les dérivateurs faibles à gauche correspondants (3.12, 3.19 et 3.20). Signalons que cette caractérisation permet une preuve simple de l'invariance de la K-théorie par équivalence dérivée (voir [7]). Enfin, à titre d'exemple, la notion de catégorie exacte dérivable est dégagée (4.5) : ce sont les catégories exactes munies d'une classe d'équivalences faibles ayant un bon comportement relativement aux monomorphismes admissibles et aux épimorphismes admissibles (*i.e.* donnant lieu à une structure de catégorie dérivable). Par exemple toute catégorie de Frobenius est une catégorie exacte dérivable avec pour équivalences faibles les équivalences stables (4.19), et toute catégorie biWaldhausen compliciale (vérifiant des propriétés de stabilité homotopique adéquates) est une catégorie exacte dérivable. En particulier, pour toute catégorie exacte $\mathcal{E}$, la catégorie des complexes bornés sur $\mathcal{E}$ est une catégorie exacte dérivable en prenant pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes. On montre que le dérivateur associé à toute catégorie exacte dérivable est triangulé (4.9) ce qui redonne, en particulier, la construction de Keller [24] du dérivateur associé à une catégorie exacte. Dans le paragraphe suivant, on définit les catégories dérivables relevantes en faisant intervenir les propriétés de relèvement standard entre cofibrations et fibrations. On montre que pour une telle catégorie dérivable $\mathcal{C}$, les morphismes d'un objet cofibrant vers un objet fibrant dans la catégorie homotopique de $\mathcal{C}$ peuvent être décrits comme des classes d'homotopie de morphisme de $\mathcal{C}$ (5.11), ce qui fait disparaître les problèmes ensemblistes éventuels quant à la construction de la catégorie homotopique de $\mathcal{C}$. On montre ensuite que la notion de catégorie dérivable relevante est stable par passage aux catégories de préfaisceaux sur une catégorie directe finie (5.13). On définit alors, à partir de la notion de catégorie dérivable, une nouvelle notion de *catégorie de modèles*, ainsi que sa version « propre », celle de catégorie de Thomason (plus exactement, la notion de catégorie de modèles dégagée par Thomason correspond exactement à celle de catégorie de modèles au sens introduit ici, mais avec de plus les propriétés suivantes : les factorisations sont fonctorielles et sont bien définies pour tout morphisme, et les équivalences faibles sont stables par image inverse (resp. directe) le long d'une fibration (resp. d'une cofibration) ; voir 5.18).

Grâce aux travail de Rădulescu-Banu [31], on étudie des variantes homotopiquement complètes de ces structures de catégorie de modèles, en leur associant des dérivateurs définis sur toutes les petites catégories. On montre en outre que les notions de catégorie de modèles introduites dans ces notes sont stables par passage aux catégories de préfaisceaux sur une petite catégorie arbitraire (6.22). On retrouve de la sorte le fait que les catégories de modèles de Thomason sont stables par passage aux catégories de préfaisceaux sur une petite catégorie arbitraire (6.24), résultat qui a déjà été démontré par Weibel [34] (d'après les notes manuscrites de Thomason) dans le cadre des catégories de Thomason simpliciales.

Remerciements. — Je tiens à exprimer ma reconnaissance au rapporteur anonyme, pour sa lecture attentive et pertinente.

Conventions ensemblistes. — Dans ces notes, on localisera des catégories sans état d'âme. Afin de rendre ces constructions rigoureuses, plusieurs choix s'offrent à nous quant aux types d'ensemble avec lesquels on travaille. Car on a un problème de taille. On parlera ici de classes et d'ensembles (en disant « petit ensemble » lorsqu'on veut vraiment insister sur le fait que l'on ne veut pas de classe), ce qui fait sens pour ZFC (variante Bernays-Gödel) ; le lecteur qui préfère les univers fixera une fois pour toutes deux univers infinis $U \in V$, et, dans ce cas, le mot « classe » signifiera pour nous « V-ensemble », alors que l'expression « ensemble » sera employée pour « U-ensemble ». Mais ce n'est pas tout. Lorsqu'on localise des catégories sans crier gare [(1)], il y a deux possibilités pour que cela ait un sens : ou bien on travaille uniquement avec des petites catégories (i.e. des catégories dont les flèches forment un petit ensemble), et alors, il vaut mieux fixer des univers, ou bien au contraire on accepte de travailler avec des catégories énormes (c'est-à-dire des catégories telles que pour tout couple d'objet (X, Y), $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soit éventuellement une classe), et alors on a totalement le choix pour ce qui est de nos axiomatiques préférées. L'auteur de ces lignes précise néanmoins que, même lorsqu'on autorise les catégories à être énormes, la question de savoir si, après localisation, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un *petit* ensemble est fondamentale, et sera abordée, lorsque cela s'avèrera adéquat et opportun.

(1) Voir [11, Chap. I, 1.1] pour la construction.