

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UR LA COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE DEGRÉ TROIS D'UN PRODUIT

Alena Pirutka

Tome 144

Fascicule 1

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 53-75

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 144, janvier 2016

Comité de rédaction

Valérie BERTHÉ	Marc HERZLICH
Gérard BESSON	O'Grady KIERAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Emmanuel RUSS
Jean-François DAT	Christophe SABOT
Charles FAVRE	Wilhelm SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € (\$ 291)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© *Société Mathématique de France* 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

SUR LA COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE EN DEGRÉ TROIS D’UN PRODUIT

PAR ALENA PIRUTKA

RÉSUMÉ. — Soit \mathbb{F} un corps fini et soit C une courbe projective et lisse sur \mathbb{F} . On établit la nullité du troisième groupe de cohomologie non ramifiée du produit $X \times C$ pour certaines surfaces projectives et lisses X sur \mathbb{F} . Cela s’applique en particulier aux surfaces géométriquement rationnelles.

ABSTRACT (*On the unramified cohomology in degree three of a product*)

Let \mathbb{F} be a finite field and let C be a smooth projective curve over \mathbb{F} . We establish that the third unramified cohomology of the product $X \times C$ vanishes for some smooth projective surfaces X over \mathbb{F} . This applies in particular to geometrically rational surfaces.

1. Introduction

Soit \mathbb{F} un corps fini. Soit V/\mathbb{F} une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension 3, munie d’un morphisme $f : V \rightarrow C$ vers une courbe projective et lisse sur \mathbb{F} . Dans un article récent [9], Colliot-Thélène et Kahn ont établi le résultat suivant qui relie la conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc sur les zéro-cycles de degré 1 sur la fibre générique V_η de f (cf. [8]) et le groupe de cohomologie non ramifiée $H_{\text{nr}}^3(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$:

Texte reçu le 21 mai 2012, révisé et accepté le 22 mai 2013.

ALENA PIRUTKA, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France • *E-mail* : alena.pirutka@polytechnique.edu

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20; 14E22, 14C25.

Mots clefs. — Cohomologie non ramifiée, zéro-cycles, applications résidu, corps finis.

Supposons que la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur V et que le groupe $H_{\text{nr}}^3(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible. S'il existe sur la surface V_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de V_η via l'accouplement de Brauer-Manin (cf. [22]), alors il existe sur V_η un zéro-cycle de degré premier à l .

Par conséquent, on s'intéresse à savoir si le groupe $H_{\text{nr}}^3(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul pour une telle variété V . Plus généralement, on conjecture ([9] Conjecture 5.6), que le troisième groupe de cohomologie non ramifiée s'annule pour une \mathbb{F} -variété projective et lisse, de dimension 3, géométriquement uniréglée. Pour une variété fibrée en coniques au-dessus d'une surface, c'est un théorème de Parimala et Suresh [26]. Pour V comme ci-dessus, le premier cas à examiner est celui d'une fibration triviale $V = X \times C$ où X est une surface géométriquement rationnelle sur \mathbb{F} . Dans cette note on établit la conjecture pour de telles variétés V . Cela donne en particulier un nouveau cas où l'on arrive à comprendre le groupe $H_{\text{nr}}^3(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ pour une variété projective et lisse V de dimension trois, définie sur \mathbb{F} (cf. [9] Question 5.4).

Pour k un corps on note \bar{k} une clôture séparable de k . Si X est une k -variété, on écrit $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Pour L un corps contenant k , on écrit $X_L = X \times_k L$. L'énoncé principal est le suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit \mathbb{F} un corps fini de caractéristique p . Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur \mathbb{F} , de dimensions respectives 1 et 2. Soit K le corps des fonctions de C . Faisons les hypothèses :*

- (H1) $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$;
- (H2) $b_2(\bar{X}) - \rho(\bar{X}) = 0$;
- (H3) $NS(\bar{X})$ est sans torsion ;
- (H4) $A_0(X_{\bar{K}}) = 0$.

Alors

$$H_{\text{nr}}^3(X \times C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$$

pour tout nombre premier $l \neq p$.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées si \bar{X} est une surface rationnelle. Elles sont aussi satisfaites pour les surfaces $K3$ supersingulières au sens de Shioda (cf. [16], ces surfaces n'existent qu'en caractéristique positive).

Pour établir le théorème 1.1, on procède par diverses réductions. On montre d'abord que le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur X_K est nul, au moins à la p -torsion près. On en déduit que tout élément ξ du groupe

$$H_{\text{nr}}^3(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \subset H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mu_{l^r}^{\otimes 2})$$

provient de $H_{\text{ét}}^3(X_K, \mu_l^{\otimes 2})$. Ceci est fait dans la section 2. Dans la section 3, on vérifie que pour les cas que l'on considère, les applications résidus sont compatibles à des applications bord dans la suite spectrale de Leray. On se ramène ainsi à considérer le groupe $H_{\text{ét}}^3(X \times C, \mathbb{Z}/l)$, ce qui nous permet de déduire le résultat dans la section 4.

1.1. Rappels et notations. — Si A est un groupe abélien et n est un entier, on note $A[n]$ le sous-groupe de A formé par les éléments annulés par n . Pour l un nombre premier on note $A\{l\}$ le sous-groupe de A formé par les éléments de torsion l -primaire.

Étant donné un corps k et un entier n inversible sur k , on note μ_n le k -schéma en groupes (étales) des racines n -ièmes de l'unité. Pour j un entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \cdots \otimes \mu_n$ (j fois). Lorsque k contient une racine primitive n -ième de l'unité, on a un isomorphisme $\mu_n^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n$ pour tout j .

Pour X un schéma on note \mathbb{G}_m le groupe multiplicatif sur X et le faisceau étale ainsi défini. On écrit $\text{Br } X = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ pour le groupe de Brauer cohomologique de X .

Pour X une k -variété propre, on note $A_0(X)$ le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur X : $A_0(X) = \ker[CH_0(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}]$. On note $\rho(\bar{X}) = \text{rk}(\text{NS}(\bar{X}))$ le rang du groupe de Néron-Severi de \bar{X} (cf. [2] XIII 5.1) et $b_i(\bar{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$, $l \neq \text{car } k$, les nombres de Betti.

1.1.0.1. *Cohomologie non ramifiée.* — Pour k un corps, F un corps de fonctions sur k , n un entier inversible sur k , $i \geq 1$ un entier naturel et $j \in \mathbb{Z}$ un entier relatif on définit

$$H_{\text{nr}}^i(F/k, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_A \text{Ker}[H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial_A} H^{i-1}(k_A, \mu_n^{\otimes j-1})].$$

Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F , contenant le corps k . Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application ∂_A est l'application résidu.

Pour X une k -variété intègre, on note $H_{\text{nr}}^i(X, \mu_n^{\otimes j}) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{nr}}^i(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j})$, où $k(X)$ est le corps des fonctions de X . On utilise aussi les groupes $H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ (resp. $H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ pour l un nombre premier) obtenus par passage à la limite inductive.

1.1.0.2. *Rappels de K -théorie.* — Pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note \mathcal{K}_j le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto K_j(H^0(U, \mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A . Lorsque X est une variété lisse sur un corps k , la conjecture de Gersten, établie par Quillen, permet de calculer les groupes de cohomologie de Zariski