Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 178
Nouvelle série

SUR LES ENSEMBLES DE ROTATION DES HOMÉOMORPHISMES DE SURFACE EN GENRE ≥ 2

G. LELLOUCH

2 0 2 3

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 38 € ($ 57)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 167 €, hors Europe : 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`memoires@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-85629-979-1

`doi:10.24033/msmf.486`

Directeur de la publication : Fabien DURAND

MÉMOIRES DE LA SMF 178

SUR LES ENSEMBLES DE ROTATION DES HOMÉOMORPHISMES DE SURFACE EN GENRE ≥ 2

Gabriel Lellouch

Société Mathématique de France 2023

G. Lellouch
Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche, UMR 7586,,
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.
E-mail : `gabriel.lellouch@outlook.com`

Soumis le 10 octobre 2019, révisé le 3 juin 2022, accepté le 20 juillet 2022.

***Classification mathématique par sujets* (2000). –** 37C25, 37E30, 37E45.

***Mots-clefs.* –** Homéomorphisme de surface, ensemble de rotation, théorie de forçage, feuilletage transverse, cycles asymptotiques, nombre d'intersection.

***Key words and phrases.* –** Surface homeomorphism, rotation set, forcing theory, transverse foliation, asymptotic cycles, intersection number.

SUR LES ENSEMBLES DE ROTATION DES HOMÉOMORPHISMES DE SURFACE EN GENRE ≥ 2

Gabriel Lellouch

Résumé. – L'un des principaux invariants dynamiques associés à un homéomorphisme de surface isotope à l'identité est son ensemble de rotation, décrivant les vitesses et directions asymptotiques moyennes selon lesquelles les points « tournent » autour de la surface sous l'action de l'homéomorphisme. Dans le cas d'un homéomorphisme du tore en particulier, de nombreux résultats relient la forme ou la taille de l'ensemble de rotation à des propriétés dynamiques de l'homéomorphisme.

Ce mémoire a pour but de généraliser au cas des surfaces de genre ≥ 2 un certain nombre de résultats connus sur le tore pour les homéomorphismes ayant un « gros » ensemble de rotation : positivité de l'entropie, réalisation de vecteurs de rotation par des points périodiques, déviations bornées, etc. L'outil principal utilisé est la théorie de forçage de Le Calvez et Tal, reposant sur la construction d'un feuilletage transverse et l'étude des trajectoires des points relativement à ce feuilletage. Les deux premiers chapitres présentent des résultats préliminaires à ce cadre général. Au chapitre 3, nous menons une étude globale sur les cycles asymptotiques de points dont les trajectoires ont des directions homologiques qui s'intersectent. Nous montrons que cette situation suffit à assurer la positivité de l'entropie, ce qui permet d'aboutir à la généralisation de deux résultats connus sur le tore, les théorèmes de Llibre-Mackay et de Franks. Nous obtenons dans le cas d'une surface de genre ≥ 2 qu'un homéomorphisme ayant un « gros » ensemble de rotation a une entropie strictement positive, et nous parvenons à réaliser de nombreux points rationnels de l'ensemble de rotation comme vecteurs de rotation de points périodiques. Enfin, au chapitre 4, nous montrons à l'aide de ce dernier résultat qu'un homéomorphisme dont l'ensemble de rotation contient 0 dans son intérieur est à déviation bornée, généralisant encore une propriété connue sur le tore. Nous terminons avec diverses conséquences de ce résultat.

Abstract **(On rotation sets for surface homeomorphisms in genus ≥ 2)**

One of the main dynamical invariants related to a surface homeomorphism isotopic to identity is its rotation set, which describes the asymptotic average speeds and directions with which the points "rotate" around the surface under the action of the homeomorphism. In the case of a torus homeomorphism in particular, many results link the shape or the size of the rotation set to dynamical properties of the homeomorphism. The aim of this work is to generalize to the case of surfaces of genus ≥ 2 a certain number of results, well-known on the torus, for homeomorphisms with a "big" rotation set : positivity of the entropy, realization of rotation vectors by periodic points, bounded deviations, etc. The leading tool used is the forcing theory by Le Calvez and Tal, based on the construction of a transverse foliation and the study of trajectories of points relatively to this foliation.

The first two chapters present some preliminary results in this general context. In chapter 3, we conduct a general study on the asymptotic cycles of points whose trajectories have homological directions that intersect. We show that this situation is sufficient to ensure the positivity of the entropy, which leads us to derive a generalization of two well-known results on the torus, Llibre-Mackay and Franks theorems. We obtain in the case of a surface of genus ≥ 2 that a homeomorphism with a "big" rotation set has positive entropy, and we manage to realize many rational points of the rotation set as rotation vectors of periodic points. Finally, in chapter 4, we use this last result to show that a homeomorphism for which 0 lies in the interior of the rotation set has bounded deviations, generalizing again a well-known property on the torus. We conclude with some consequences of this result.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

1 État de l'art

1.1 Nombre et ensemble de rotation. – Commençons par rappeler le cas classique de la théorie du nombre de rotation pour les homéomorphismes du cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, introduite par Poincaré en 1885 dans son célèbre mémoire [**38**]. Soit $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ un homéomorphisme préservant l'orientation, et $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relevé de f à $\mathbb{R}$. Pour tout $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$, la quantité

$$\rho(\widetilde{f}, \widetilde{x}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}}{n} \pmod 1$$

est bien définie, indépendante des choix de $\widetilde{x}$ et du relevé $\widetilde{f}$: on la note $\rho(f)$ et on l'appelle *nombre de rotation* de f. En quelque sorte, le nombre de rotation mesure la « vitesse moyenne » asymptotique à laquelle les points de $\mathbb{T}^1$ tournent le long du cercle sous l'action de f.

La donnée de ce simple nombre permet d'avoir déjà de précieuses informations sur la dynamique de f. Par exemple, la situation est très différente selon que $\rho(f)$ est rationnel ou non : si $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors f possède une orbite périodique ; si au contraire $\rho(f) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$, alors f est semi-conjugué à la rotation $z \mapsto z + \rho(f)$ de $\mathbb{T}^1$ (cette semi-conjugaison étant une vraie conjugaison si et seulement si f est minimal, ce qui se produit par exemple quand f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme (voir les travaux de Denjoy [**10**])).

Le fait que le nombre de rotation soit bien défini et indépendant du point $\widetilde{x}$ choisi indique, dans le cas d'un homéomorphisme du cercle, que tous les points « tournent à la même vitesse » asymptotiquement, ceci découlant de l'existence d'un ordre cyclique sur $\mathbb{T}^1$. Si l'on souhaite généraliser cette définition aux homéomorphismes d'autres espaces (les surfaces par exemple), on se doute que l'on va perdre cette propriété. Ce n'est donc pas un unique nombre de rotation que l'on va définir, mais un *ensemble de rotation*, contenant les vitesses et directions moyennes (si tant est que ces quantités existent) des orbites des points de l'espace considéré.

Intéressons-nous donc au cas d'un homéomorphisme $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On va s'intéresser uniquement au cas où f est *isotope à l'identité*, c'est-à-dire qu'il existe un chemin continu, dans l'espace des homéomorphismes de $\mathbb{T}^2$, reliant $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}$ à f (cette condition est analogue à la préservation de l'orientation demandée pour les homéomorphismes du cercle $\mathbb{T}^1$). Dans ce cas, f se relève à $\mathbb{R}^2$ en un homéomorphisme $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ commutant aux translations entières. Si l'on veut calquer la définition que l'on a dans le cas du cercle, on se heurte au problème suivant : pour $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$, la suite $(\frac{1}{n}(\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}))_{n\geq 1}$ ne converge pas forcément. On peut cependant s'intéresser aux valeurs d'adhérence de suites formées par ce type de quantités, et définir l'ensemble

$$\rho(\widetilde{f}) = \bigcap_{m\geq 1} \overline{\bigcup_{n\geq m} \left\{ \frac{\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}}{n},\ \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2 \right\}} \subset \mathbb{R}^2.$$

Une autre manière de définir l'ensemble de rotation de $\widetilde{f}$ est, au lieu de moyenner temporellement le déplacement des points de $\mathbb{T}^2$ sous l'action de f, de le faire spatialement. Soit $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes f-invariantes sur $\mathbb{T}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{T}^2$, soit $\Delta_{\widetilde{f}}(x) = \widetilde{f}(\widetilde{x}) - \widetilde{x}$ où $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ est un relevé de x : cette quantité est indépendante du relevé $\widetilde{x}$ choisi, car f est isotope à l'identité. On définit alors

$$\mathrm{rot}(\widetilde{f}) = \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_{\widetilde{f}}(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \mid \mu \in \mathcal{M}(f) \right\}.$$

Ces deux ensembles $\rho(\widetilde{f})$ et $\mathrm{rot}(\widetilde{f})$ sont en fait égaux (voir les travaux de Misiurewicz et Ziemian [**36**]), et appelés *ensemble de rotation* de $\widetilde{f}$; c'est un compact convexe de $\mathbb{R}^2$. Notons bien que cet ensemble de rotation dépend du choix d'un relevé $\widetilde{f}$ de f.

Ces deux définitions peuvent s'adapter pour des surfaces de genre supérieur. Néanmoins, si le premier ensemble est toujours inclus dans le second (ses éléments correspondent aux moyennes des déplacements relativement aux mesures qui sont limites, pour la topologie faible*, de mesures portées par des portions d'orbites), il n'y a plus forcément égalité en genre plus grand : en particulier, le premier ensemble n'a plus de raison d'être convexe. Afin de garder cette propriété de convexité, c'est donc la seconde définition, à partir de $\mathcal{M}(f)$ tout entier, que nous allons privilégier pour définir l'ensemble de rotation d'un homéomorphisme en genre supérieur. Détaillons cette définition.

Soit $f : M \to M$ isotope à l'identité sur une surface M compacte orientée de genre $g \geq 1$ (le mot surface désignant dans tout le texte une variété séparée et connexe de dimension 2). Soit $I : [0,1] \times M \to M$ une isotopie entre Id_M et f, c'est-à-dire une application continue telle que pour tout $x \in M$, $I(0,x) = x$ et $I(1,x) = f(x)$, et pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto I(t,x)$ est un homéomorphisme de M. Pour tout $x \in M$, on note alors $I(x)$ le chemin $t \mapsto I(t,x)$ donné par l'isotopie, reliant x à $f(x)$. Soit également $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes f-invariantes sur M. Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$, pour toute 1-forme différentielle fermée ω sur M, l'intégrale

$$\int_M \left(\int_{I(x)} \omega \right) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

est bien définie, et s'annule par f-invariance de μ dès que ω est exacte. L'application $\omega \mapsto \int_M (\int_{I(x)} \omega) \, \mathrm{d}\mu(x)$ passe donc au quotient en une forme linéaire sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R})$ de M, c'est-à-dire par dualité en un élément du premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{R})$ de M. Cet élément ρ_μ est appelé *vecteur de rotation* de la mesure μ, et l'ensemble de rotation de f est alors défini par

$$\mathrm{rot}(f) = \{\rho_\mu \mid \mu \in \mathcal{M}(f)\} \subset H_1(M, \mathbb{R}).$$

Dans le cas du tore, cette définition coïncide alors avec les définitions précédentes via l'identification canonique entre $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ et le revêtement universel de $\mathbb{T}^2$. Cependant, il faut noter que cette définition dépend toujours, sur le tore, du choix de l'isotopie, et donc du choix d'un relevé de f. Ceci n'est pas le cas en genre supérieur : si $g \geq 2$, cette définition est indépendante du choix de l'isotopie (ceci découle de travaux de Hamstrom [**18**], qui montre que deux isotopies entre Id_M et f sont homotopes), et contrairement au cas du tore $\mathbb{T}^2$, l'ensemble de rotation est bien défini directement pour f et pas uniquement pour les relevés de f, ce qui justifie la notation $\mathrm{rot}(f)$. Signalons également au passage qu'en genre $g \geq 2$, une telle définition peut être étendue aux homéomorphismes homotopes à Id_M car en vertu de résultats de Baer [**4**] puis d'Epstein [**11**], tout homéomorphisme homotope à Id_M est en fait isotope à Id_M (ce qui est également vrai sur le tore).

Comme $\mu \mapsto \rho_\mu$ est affine et que $\mathcal{M}(f)$ est compact et convexe pour la topologie faible*, alors $\mathrm{rot}(f)$ est un compact convexe de $H_1(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g}$. Remarquons que si $g \geq 2$, il contient toujours 0 : en effet, en vertu du théorème du point fixe de Nielsen (voir par exemple [**23**]), f possède nécessairement un point fixe contractile, et il est facile de voir que le vecteur de rotation de la mesure de Dirac en un tel point fixe contractile est nul. Notons également que que les points extrêmaux de $\mathrm{rot}(f)$ sont vecteurs de rotation de points extrêmaux de $\mathcal{M}(f)$, c'est-à-dire de mesures ergodiques : en effet, pour tout $\rho \in \mathrm{rot}(f)$, l'ensemble $\mathcal{M}_\rho = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \rho_\mu = \rho\}$ est un convexe compact de $\mathcal{M}(f)$, et si ρ est en plus un point extrêmal de $\mathrm{rot}(f)$, alors les points extrêmaux de $\mathcal{M}_\rho$ sont aussi points extrêmaux de $\mathcal{M}(f)$. Enfin, si $x \in M$ est un point $f-$périodique, on appellera vecteur de rotation de x le vecteur de rotation de la mesure de probabilité équidistribuée sur l'orbite de x : ce vecteur appartient alors à $H_1(M, \mathbb{Q})$.

Si la définition de $\mathrm{rot}(f)$ peut paraître assez formelle, on peut cependant en donner une interprétation plus visuelle en termes de *cycles asymptotiques* (voir Schwartzman [**40**] et Pollicott [**39**]). Soit $\mu \in \mathcal{M}(f)$ une mesure pour laquelle il existe $x \in M$ tel que

$$\mu = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \quad \text{(pour la topologie faible}^*\text{)}$$

où δ_z désigne la mesure de Dirac au point z. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut concaténer les trajectoires $I(f^k(x))$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ en une trajectoire $I^n(x)$ reliant x à $f^n(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $c_n(x)$ un chemin reliant $f^n(x)$ à x tel que les $(c_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ soient de longueurs (relativement à une métrique riemannienne sur M) bien définies et uniformément bornées en n. Soit $\gamma_n(x)$ le lacet obtenu en concaténant $I^n(x)$ et $c_n(x)$, et $[\gamma_n(x)]$ sa classe d'homologie ; alors le vecteur de rotation de la mesure μ est donné par

$$\rho_\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\gamma_n(x)]}{n}.$$

Autrement dit, si la mesure μ est associée à l'orbite d'un point x (ce qui sera le cas par exemple pour les mesures ergodiques), alors son vecteur de rotation correspond à la « direction homologique » asymptotique de la trajectoire de x donnée par l'isotopie, qu'on peut comprendre en moyennant asymptotiquement les classes d'homologie de lacets de plus en plus grands approximant cette trajectoire.

1.2 Résultats sur le tore. – L'ensemble de rotation pour un relevé d'un homéomorphisme du tore isotope à l'identité étant un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^2$, il y a trois possibilités : il peut être un singleton, un segment non trivial, ou un compact convexe d'intérieur non vide. Savoir si un compact convexe donné de $\mathbb{R}^2$ peut être réalisé comme ensemble de rotation d'un relevé d'un homéomorphisme du tore est une question qui se pose encore aujourd'hui, à laquelle on a cependant de très nombreuses réponses partielles. Citons à ce sujet les résultats de Kwapisz [**29**] et [**30**] sur les ensembles de rotation polygonaux, ou ceux de Boyland, de Carvalho et Hall [**6**] pour la construction d'autres ensembles de rotation explicites dans le cas d'intérieur non vide. Dans le cas d'intérieur vide, Franks et Misiurewicz ont conjecturé, dans [**14**], qu'un ensemble de rotation non réduit à un point est soit un segment à pente rationnelle contenant un point à coordonnées rationnelles, soit un segment à pente irrationnelle dont l'une des extrémités est à coordonnées rationnelles. Si l'on dispose d'un contre-exemple (non publié, dû à Ávila) à cette conjecture dans le cas de pente irrationnelle, le cas de pente rationnelle reste toujours ouvert malgré quantité d'avancées sur le sujet ([**26**], [**27**], [**37**], [**32**]$\cdots$).

Inversement, et à l'instar du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle, connaître l'ensemble de rotation permet d'avoir certaines informations sur la dynamique de l'homéomorphisme. Parmi les nombreux résultats de ce type dont on dispose, citons-en quelques-uns qui nous intéresseront tout particulièrement. Le premier, dû à Llibre et Mackay [**34**], affirme que la dynamique de f est « riche » dès que l'ensemble de rotation est suffisamment gros :

Théorème 1 (Llibre-Mackay). – *Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, dont on fixe un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$. Si $\operatorname{rot}(\widetilde{f})$ est d'intérieur non vide, alors l'entropie de f est strictement positive.*

La preuve originelle de Llibre et Mackay repose sur la très fructueuse classification de Nielsen-Thurston pour les homéomorphismes de surface, consistant à déduire des informations dynamiques de l'étude des classes d'isotopie (voir l'article de Thurston [**42**] ou par exemple le livre [**8**]). Plus récemment cependant, dans [**32**], Le Calvez et Tal ont pu redémontrer ce résultat à l'aide de leur théorie de forçage, dont on rappellera les bases au chapitre 1.

L'ensemble de rotation peut également donner des informations sur l'existence de points périodiques ayant des vecteurs de rotation, donc des « directions asymptotiques », donnés. Plus précisément, dans le cas d'un homéomorphisme du cercle, on sait que l'on dispose d'une orbite périodique si et seulement si le nombre de rotation est rationnel. Il est donc naturel de se demander, dans le cas du tore, si les points rationnels de l'ensemble de rotation (i.e. les points dont les deux coordonnées sont rationnelles) sont ou non réalisés comme vecteurs de rotation de points périodiques. Le premier résultat dans ce sens, dû à Franks [**12**], affirme que c'est le cas pour les points rationnels extrêmaux de l'ensemble de rotation. Puis, dans [**13**], il étend cette propriété à tous les points rationnels de l'intérieur de l'ensemble de rotation :

Théorème 2 (Franks). – *Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, dont on fixe un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q}\right) \in \mathbb{Q}^2$ appartenant à l'intérieur de $\mathrm{rot}(\widetilde{f})$, il existe $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\widetilde{f}^q(\widetilde{x}) = \widetilde{x} + (p, p')$.*

Plusieurs résultats portent enfin sur la vitesse de convergence des moyennes des quantités de la forme $\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}$ vers l'ensemble de rotation, avec plus ou moins d'hypothèses selon que l'ensemble de rotation est un point (Jäger [**20**] et [**21**], Koropecki-Tal [**28**]), un segment (Guelman-Koropecki-Tal [**15**], Dávalos [**9**], Kocsard [**26**]), ou est d'intérieur non vide (Addas-Zanata [**1**], Dávalos [**9**]). Plus précisément, étudier le comportement de ce type de quantités renseigne sur la précision de l'information contenue dans l'ensemble de rotation. Dans le cas d'intérieur non vide, citons le théorème suivant, toujours dû à Le Calvez et Tal [**32**], et dont la preuve repose également sur la théorie de forçage :

Théorème 3 (Le Calvez-Tal). – *Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, dont on fixe un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$. Si $\mathrm{rot}(\widetilde{f})$ est d'intérieur non vide, alors il existe une constante $L \geq 0$ telle que pour tout $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$d(\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}, n \cdot \mathrm{rot}(\widetilde{f})) \leq L.$$

Ce résultat est une généralisation de ce que l'on trouve dans [**9**] pour les ensembles de rotation polygonaux à sommets rationnels, et dans [**1**] pour les $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$-difféomorphismes (c'est-à-dire les $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes dont la dérivée est $\varepsilon-$hölderienne pour un $\varepsilon > 0$). En particulier, il permet à Le Calvez et Tal de donner une réponse positive à une conjecture de Boyland (initialement faite sur l'anneau $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$) dans le cas du tore (ceci étant aussi fait dans [**1**]) :

COROLLAIRE 4 (Le Calvez-Tal). – *Soit* $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *un homéomorphisme isotope à l'identité, dont on fixe un relevé* $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *à* $\mathbb{R}^2$*, et* μ *une mesure borélienne de probabilité* f*-invariante de support total, dont on note* $\mathrm{rot}(\mu)$ *le vecteur de rotation.*

Si $\mathrm{Int}(\mathrm{rot}(\widetilde{f})) \neq \emptyset$*, alors* $\mathrm{rot}(\mu) \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(\widetilde{f}))$*.*

Il existe bien sûr de nombreux autres résultats donnant des informations sur la dynamique de f, également dans les cas où l'ensemble de rotation est un point ou un segment. Si nous nous sommes restreints à ces quelques résultats ici, c'est qu'il s'agit des principaux résultats que nous adapterons au cas de surfaces de genre supérieur.

1.3 Et en genre ≥ 2?– En genre plus grand, la situation est très différente car la géométrie de la surface n'est plus du tout semblable à celle du tore. En particulier, les choses se compliquent car le premier groupe d'homologie de la surface (dans lequel vit l'ensemble de rotation) est plus difficile à appréhender : il n'est plus égal au groupe fondamental mais à son abélianisé. Néanmoins, plusieurs résultats tentent d'adapter les théorèmes dont on dispose sur le tore cités précédemment.

Comme pour le théorème de Llibre et Mackay sur le tore, on peut se demander si avoir un ensemble de rotation suffisamment « gros » permet d'affirmer que la dynamique est « riche » (et en particulier que l'entropie est strictement positive). Le premier résultat qui va dans ce sens est dû à Pollicott [**39**] :

THÉORÈME 5 (Pollicott). – *Soit* $f : M \to M$ *un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée* M *de genre* $g \geq 2$*. S'il existe* $2g+1$ *points périodiques dont les vecteurs de rotation ne sont pas contenus dans un hyperplan commun de* $H_1(M,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g}$*, alors l'entropie de* f *est strictement positive.*

En particulier, notons que l'hypothèse de ce théorème implique comme dans le cas du tore que l'intérieur de l'ensemble de rotation est non vide. Un résultat assez similaire est le suivant, dû à Matsumoto [**35**], mais est plus précis dans la mesure où il ne requiert pas que l'ensemble de rotation soit d'intérieur non vide :

THÉORÈME 6 (Matsumoto). – *Soit* $f : M \to M$ *un* C^1*-difféomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée* M *de genre* $g \geq 2$*. S'il existe* $g+2$ *points périodiques dont les vecteurs de rotation forment un* $(g+1)-$*simplexe non dégénéré, alors l'entropie de* f *est strictement positive.*

Ces deux résultats reposent en grande partie, tout comme le théorème de Llibre et Mackay, sur la théorie de Nielsen-Thurston de classification des homéomorphismes de surface. Dans leurs énoncés, l'hypothèse sur la taille de l'ensemble de rotation implique en particulier que l'ensemble de rotation n'est pas totalement isotrope pour la forme symplectique $\wedge$ naturelle sur $H_1(M,\mathbb{R})$ (dont on rappellera la définition au paragraphe 1.1.3), au sens où la restriction de $\wedge$ à l'ensemble de rotation n'est pas identiquement nulle. À ce titre, il paraît utile de rappeler un résultat, dû à Katok (voir [**24**] ou [**25**]), dans le cas des flots. Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ est un flot engendré par un champ de vecteurs sur une surface compacte orientée M, on appelle ensemble de rotation de φ l'ensemble de rotation de l'homéomorphisme de temps 1 de φ. Le résultat de Katok est alors le suivant :

THÉORÈME 7 (Katok). – *L'ensemble de rotation de φ est totalement isotrope pour $\wedge$.*

L'argument principal sur lequel repose la preuve de ce théorème (voir **[25]**) est que les trajectoires du flot ne s'intersectent jamais deux à deux (tandis que dans le cas d'un homéomorphisme, les trajectoires données par l'isotopie peuvent s'intersecter). Ceci fait donc apparaître le lien, que nous détaillerons dans la suite, entre l'intersection au sens de la forme $\wedge$ et l'intersection des trajectoires.

Revenons maintenant au cas des homéomorphismes. Dans les théorèmes 5 et 6, la question de savoir si certains points rationnels de l'ensemble de rotation sont réalisés comme vecteurs de rotation de points périodiques apparaît comme étant fondamentale. On peut en particulier se demander si on dispose d'un analogue au théorème 2 en genre ≥ 2. Si certains résultats donnent des conditions suffisantes pour obtenir l'existence de vecteurs de rotation de points périodiques dans l'ensemble de rotation (voir Hayakawa **[19]** ou Matsumoto **[35]**), on sait néanmoins que le théorème 2, tel quel, ne peut s'adapter directement en genre supérieur. Ceci est exprimé dans ce résultat de Matsumoto **[35]** :

THÉORÈME 8 (Matsumoto). – *Il existe un homéomorphisme $f : M \to M$ isotope à l'identité sur une surface fermée M de genre 2, dont l'intérieur de l'ensemble de rotation est non vide, mais ne contient aucun vecteur réalisé par une orbite périodique.*

Pour montrer ce résultat, Matsumoto exhibe un contre-exemple assez élémentaire. Soit M une surface fermée de genre 2, obtenue en recollant deux tores, dont on note l, m, l' et m' les courbes équateurs et méridiens respectives. On peut alors définir un homéomorphisme f isotope à l'identité ayant quatre points fixes x, y, x' et y' non contractiles, tels que sous l'isotopie, x fait le tour de l, y fait le tour de m, x' fait le tour de l', et y' fait le tour de m' ; ainsi, les vecteurs de rotation de x, y, x' et y' sont égaux respectivement aux classes d'homologies $[l]$, $[m]$, $[l']$ et $[m']$. Au voisinage de la zone de recollement des deux tores, l'isotopie est égale à l'identité. Il est bien clair, dans un tel exemple, que $\mathrm{rot}(f)$ est d'intérieur non vide, car les quatre vecteurs de rotation de x, y, x' et y' engendrent l'homologie. Mais la dynamique de f étant entièrement dissociée entre les deux tores, les points périodiques de f sont situés soit d'un côté soit de l'autre ; leurs vecteurs de rotation sont donc soit sur le plan engendré par $[l]$ et $[m]$, soit sur le plan engendré par $[l']$ et $[m']$.

En un sens, un tel exemple vient souligner le fait que la définition de $\mathrm{rot}(f)$ à partir de l'ensemble des mesures invariantes, que nous utiliserons dans toute la suite, n'est pas forcément toujours la plus naturelle. Ici, en particulier, la convexité vient « remplir » l'intérieur de $\mathrm{rot}(f)$, tandis que la dynamique est, dans les faits, uniquement concentrée sur les plans engendrés respectivement par $[l]$ et $[m]$ et par $[l']$ et $[m']$.

Enfin, et contrairement au cas du tore, peu de résultats de « déplacements uniformes » équivalents au théorème 3 existent en genre supérieur. Parmi les rares avancées sur le sujet, citons les travaux d'Addas-Zanata et de Paula Jacóia **[2]**, qui donnent une condition ayant de multiples conséquences sur la dynamique des $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$-difféomorphismes, y compris une propriété de déplacement uniforme similaire au théorème 3 et une réponse à la conjecture de Boyland 4 en genre supérieur. Cette condition est la suivante :

DÉFINITION 9. – *On dit qu'un homéomorphisme $f : M \to M$ admet un système essentiel de courbes s'il existe une famille $\{g_1, \dots, g_r\}$ de géodésiques fermées de M, et pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ des points périodiques p_i^- et p_i^+ (de périodes respectives n_i^- et n_i^+), tels que :*

- *le premier groupe d'homologie de chaque composante connexe du complémentaire de $\bigcup_{1\leq i\leq r} g_i$ dans M est trivial,*
- *pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, les trajectoires $I^{n_i^-}(p_i^-)$ et $I^{n_i^+}(p_i^+)$ des points p_i^- et p_i^+ sous l'isotopie sont des lacets homotopes à g_i, avec chacune des deux orientations possibles.*

2 Énoncé des résultats

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la dynamique des homéomorphismes de surface isotopes à l'identité sur des surfaces de genre ≥ 2 à partir de leur ensemble de rotation. Plus précisément, notre but est d'obtenir pour de telles surfaces des résultats similaires à ceux dont on dispose sur le tore et que nous avons cités précédemment (théorèmes 1, 2, 3 et 4), et qui viendront ainsi améliorer ce que l'on sait sur ces surfaces (théorèmes 5 et 6). Bien que tous les énoncés qui suivent soient des généralisations de résultats connus sur le tore, nous les énoncerons uniquement dans le cadre d'une surface de genre ≥ 2, sans leur adjoindre le cas connu du tore. Cela est intentionnel : en effet, les preuves que nous présenterons utiliseront l'hypothèse selon laquelle le genre est au moins 2, et ne fonctionneront donc pas directement sur le tore.

Nous nous intéresserons tout particulièrement aux homéomorphismes ayant un « gros » ensemble de rotation. À ce titre, l'hypothèse fondamentale de plusieurs de nos résultats sera l'existence de deux mesures ergodiques dont les vecteurs de rotation « s'intersectent », au sens où ils n'annulent pas la forme symplectique $\wedge$. Le premier résultat indique que cette hypothèse suffit à assurer une certaine complexité dynamique :

THÉORÈME A. – *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre $g \geq 2$. S'il existe deux mesures de probabilité ergodiques f-invariantes μ et ν de vecteurs de rotation ρ_μ et ρ_ν tels que $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$, alors f est topologiquement chaotique, au sens où :*

- *l'entropie de f est strictement positive, et*
- *le nombre de points périodiques de période n d'un certain itéré de f croît exponentiellement en n.*

En appelant *dimension* de $\mathrm{rot}(f)$ la dimension minimale d'un sous-espace vectoriel de $H_1(M,\mathbb{R})$ dans lequel $\mathrm{rot}(f)$ est inclus, ce théorème admet alors pour corollaire immédiat :

COROLLAIRE B. – *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *n'est pas totalement isotrope pour la forme symplectique* $\wedge$*, alors* f *est topologiquement chaotique. En particulier, c'est donc le cas si* $\mathrm{rot}(f)$ *est de dimension au moins* $g+1$.

Autrement dit, les homéomorphismes dont l'ensemble de rotation est suffisamment « gros » ont une dynamique « riche ». Ce résultat est donc une adaptation naturelle du théorème 1 de Llibre et Mackay, et une généralisation des théorèmes 5 et 6 de Pollicott et Matsumoto. Notons que bien sûr, il implique que si $\mathrm{rot}(f)$ est d'intérieur non vide, alors f est topologiquement chaotique (et donc son entropie est strictement positive).

Le deuxième résultat concerne l'existence de points périodiques :

THÉORÈME C. – *Soit* $f : M \to M$ *un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre* $g \geq 2$*. On fixe une norme* $\|.\|$ *sur* $H_1(M,\mathbb{R})$ *et pour tout* $\rho \in H_1(M,\mathbb{R})$ *et* $\varepsilon > 0$*, on note* $B(\rho,\varepsilon)$ *la boule ouverte de centre* ρ *et rayon* ε *pour cette norme.*

Pour toutes mesures de probabilité ergodiques f*-invariantes* μ *et* ν *de vecteurs de rotation* ρ_μ *et* ρ_ν *tels que* $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$*, pour tout* $\varepsilon > 0$*, pour tout* $r \in [0,1]$*, il existe un point périodique* z *dont le vecteur de rotation* ρ_z *appartient à* $B(r\rho_\mu + (1-r)\rho_\nu, \varepsilon)$*. De plus, pour tout* $\kappa \in \mathbb{Q} \cap]0,1]$*, il existe un point périodique de vecteur de rotation* $\kappa\rho_z$*.*

Si l'on sait grâce au contre-exemple 8 de Matsumoto que le résultat 2 de Franks ne peut s'adapter tel quel en genre plus grand, ce théorème vient néanmoins lui faire écho. En effet, il indique que l'adhérence de l'ensemble des vecteurs de rotation réalisés par des orbites périodiques contient chaque triangle de sommet 0, ρ et ρ', où ρ et ρ' sont des points extrêmaux de l'ensemble de rotation de f qui s'intersectent en homologie. En quelque sorte, on est en mesure de trouver de nombreux vecteurs de rotation d'orbites périodiques, près de l'intérieur de certaines « faces » de l'ensemble de rotation.

Le théorème C vient en particulier donner des informations sur les formes possibles que peut, ou plutôt, que ne peut pas prendre un ensemble de rotation. Le premier corollaire est immédiat :

COROLLAIRE D. – *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *n'est pas totalement isotrope pour la forme* $\wedge$*, alors* $\mathrm{rot}(f)$ *contient un point non nul à coordonnées rationnelles. Par exemple,* $\mathrm{rot}(f)$ *ne peut être un triangle non isotrope, sans rationnel hormis* 0.

Le second corollaire que nous montrerons est un énoncé de type Franks-Misiurewicz puisqu'il concerne les ensembles de rotation d'intérieur vide :

Corollaire E. – *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *est d'intérieur vide, alors tout segment non totalement isotrope reliant deux de ses points extrêmaux est inclus dans un hyperplan engendré par des vecteurs à coordonnées rationnelles. En particulier, si* $\mathrm{rot}(f)$ *est de dimension comprise entre* $g+1$ *et* $2g-1$*, alors il possède deux points extrêmaux dont les coordonnées ne sont pas linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$*.*

L'outil principal dont nous nous servirons pour montrer les deux théorèmes A et C est la théorie de forçage de Le Calvez et Tal, issue de [**32**], dont nous détaillerons les bases au chapitre suivant, en section 1.3. L'une des notions centrales de cette théorie, basée sur l'étude d'une isotopie *maximale* et d'un feuilletage $\mathcal{F}$ *transverse* à cette isotopie, est la notion d'*(auto-)intersection* $\mathcal{F}$*-transverse* de trajectoires *transverses* de points de M (tout cela sera défini en détail au chapitre suivant). Comme nous le verrons, cette notion d'intersection est une condition suffisante à la positivité de l'entropie et à l'existence de points périodiques. Ainsi, c'est précisément cette condition que nous allons utiliser pour montrer les théorèmes A et C, à travers la proposition fondamentale suivante :

Proposition F. – *Soit* $f : M \to M$ *un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre* $g \geq 2$*,* I *une isotopie maximale entre* Id_M *et* f*, et* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transverse à l'isotopie* I*. S'il existe deux mesures de probabilité ergodiques* f*-invariantes* μ *et* ν *de vecteurs de rotation* ρ_μ *et* ρ_ν *tels que* $\rho_\mu \wedge \rho_\nu \neq 0$*, alors :*

- *soit il existe deux points récurrents* z *et* $z' \in M$ *dont les trajectoires transverses ont une intersection* $\mathcal{F}$*-transverse,*
- *soit il existe un point* $z \in M$ *dont la trajectoire transverse a une auto-intersection* $\mathcal{F}$*-transverse.*

On retrouve en particulier dans cette proposition le lien entre l'intersection des vecteurs de rotation (au sens de la forme $\wedge$) et l'intersection des trajectoires, lien qui apparaissait déjà avec le théorème 7 de Katok dans le cas des flots.

À l'aide du théorème C et de plusieurs résultats intermédiaires que nous aurons montrés préalablement, nous serons en mesure d'obtenir également un équivalent du théorème 3. Si f est isotope à l'identité, pour tout $z \in M$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I^n(z)$ le chemin reliant z à $f^n(z)$ obtenu en concaténant les trajectoires $I(f^k(z))$, pour $k = 0, \dots, n-1$, données par l'isotopie. La notion de déplacement de la forme $\widetilde{f}^n(\widetilde{z}) - \widetilde{z}$ n'ayant plus de sens en genre ≥ 2, on va la remplacer par une estimation de la direction homologique que prend la trajectoire $I^n(z)$. Le résultat s'énonce alors ainsi :

Théorème G. – *Soit* $f : M \to M$ *un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre* $g \geq 2$*. On fixe une norme sur* $H_1(M, \mathbb{R})$ *et on note* d *la distance induite. Pour tout* $z \in M$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $c_n(z)$ *un chemin de* M *reliant* $f^n(z)$ *à* z*, de longueur (relativement à une métrique riemannienne sur* M*) bien définie et uniformément bornée en* z *et* n*. Soit* $\overline{I^n(z)}$ *la classe d'homologie du lacet obtenu en concaténant* $I^n(z)$ *et* $c_n(z)$*.*

Si 0 *est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation de* f*, alors il existe* $L > 0$ *tel que pour tout* $z \in M$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, on ait* $d(\overline{I^n(z)}, n \cdot \mathrm{rot}(f)) \leq L$.

Un point crucial de la preuve de ce théorème sera de montrer l'existence d'un système de courbes ayant des propriétés assez similaires à la propriété de la définition 9 (voir [**2**]), ce qui aura de nombreuses conséquences dynamiques. En appliquant le théorème C, nous parviendrons en effet à obtenir :

PROPOSITION H. – *Soit* $f : M \to M$ *un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre* $g \geq 2$*,* I *une isotopie maximale entre* Id_M *et* f*, et* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transverse à l'isotopie* I*. Si* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$*, alors il existe un entier* $r \geq 1$ *et une famille* $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ *de* r *lacets transverses à* $\mathcal{F}$ *tels que :*

- *pour tout* $j \in \{1, \dots, r\}$*,* $[\gamma_j] \neq 0$*,*
- *pour tout* $j \in \{1, \dots, r\}$*,* γ_j *est la trajectoire transverse d'un point périodique,*
- *les* $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$ *engendrent* $H_1(M, \mathbb{R})$*, et*
- 0 *est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des* $([\gamma_j])_{1 \leq j \leq r}$.

Notons bien que le théorème G est tout de même sensiblement plus faible que son analogue (théorème 3) sur le tore, puisque son hypothèse principale est que l'intérieur de l'ensemble de rotation contient 0 (et pas seulement que cet intérieur est non vide). Cette hypothèse est nécessaire pour les preuves que nous présenterons (par exemple, pour obtenir la proposition H), mais il n'est cependant pas exclu de pouvoir l'affaiblir, par d'autres arguments, et d'obtenir ainsi une meilleure version du théorème G.

Enfin, nous pourrons obtenir un certain nombre de corollaires au théorème G, concernant les mesures dont le vecteur de rotation est dans la frontière de $\mathrm{rot}(f)$. Afin de les énoncer, introduisons quelques notations. Soit ω une 1-forme différentielle fermée sur M, et $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ sa classe de cohomologie. Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$ de vecteur de rotation $\mathrm{rot}(\mu)$, on notera

$$\mathrm{rot}(\mu).[\omega] = \int_M \left(\int_{I(x)} \omega \right) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

(autrement dit, on voit l'élément $\mathrm{rot}(\mu)$ du premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{R})$ par dualité, comme une forme linéaire sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R})$). Comme $\mathcal{M}(f)$ est compact, on peut définir

$$\alpha_{[\omega]} = \max_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \mathrm{rot}(\mu).[\omega] \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{[\omega]} = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \mathrm{rot}(\mu).[\omega] = \alpha_{[\omega]}\}.$$

En notant $\mathrm{supp}(\mu)$ le support d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$, on définit alors

$$X_{[\omega]} = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{[\omega]}} \mathrm{supp}(\mu)}.$$

On fixe enfin une norme $\|.\|_{H^1}$ sur le premier groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R})$. De même que le théorème 3 admet comme corollaire le théorème 4, la conséquence principale du théorème G est donnée par la version suivante de la conjecture de Boyland :

Théorème I. – *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme isotope à l'identité sur une surface fermée de genre ≥ 2, et μ une mesure borélienne de probabilité f-invariante de support total, dont on note* $\mathrm{rot}(\mu)$ *le vecteur de rotation. Si* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$*, alors* $\mathrm{rot}(\mu) \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$.

En particulier, ce théorème s'applique donc pour un homéomorphisme isotope à l'identité qui préserve l'aire : si 0 est dans l'intérieur de l'ensemble de rotation d'un tel homéomorphisme, alors c'est aussi le cas du vecteur de rotation de la mesure de Lebesgue. Le théorème reposera sur la proposition fondamentale suivante, qui elle-même découlera du théorème G et du lemme d'Atkinson (que nous réénoncerons en 3.2.1, voir [**3**]) :

Proposition J. – *Si* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$*, alors il existe une constante $L_0 \in \mathbb{R}$ telle que pour toute 1-forme fermée ω, pour tout $z \in X_{[\omega]}$, pour tout $n \geq 1$,*

$$\left| \left(\int_{I^n(z)} \omega \right) - n\alpha_{[\omega]} \right| \leq L_0 \left\| [\omega] \right\|_{H^1} .$$

En particulier, toute mesure μ supportée sur $X_{[\omega]}$ appartient à $\mathcal{M}_{[\omega]}$.

De manière similaire au cas du tore (voir [**32**]), nous pourrons enfin obtenir un résultat analogue à cette dernière proposition pour tous les points appartenant au support d'une mesure dont le vecteur de rotation est dans la frontière de $\mathrm{rot}(f)$, notée $\partial\,(\mathrm{rot}(f))$. On adopte les notations suivantes :

$$\mathcal{M}_\partial = \{\mu \in \mathcal{M}(f) \mid \mathrm{rot}(\mu) \in \partial\,(\mathrm{rot}(f))\} \quad \text{ et } X_\partial = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_\partial} \mathrm{supp}(\mu)}.$$

Pour tout $z \in M$ et $n \in \mathbb{N}$, on désigne encore par $\overline{I^n(z)}$ la classe d'homologie d'un lacet obtenu en refermant $I^n(z)$ par un chemin de longueur uniformément bornée en z et n. On fixe aussi une norme sur $H_1(M, \mathbb{R})$ et on note d la distance induite. On obtiendra alors :

Proposition K. – *Si* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{rot}(f))$*, alors il existe une constante $L_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $z \in X_\partial$, pour tout $n \geq 1$,*

$$d\left(\overline{I^n(z)}, n \cdot \partial\,(\mathrm{rot}(f))\right) \leq L_1.$$

En particulier, toute mesure ergodique μ supportée sur X_∂ appartient à $\mathcal{M}_\partial$.

3 Plan du mémoire

Ce mémoire comporte quatre chapitres. Divers préliminaires sont faits dans les deux premiers chapitres, tandis que les deux chapitres suivants sont consacrés aux preuves des résultats que nous avons énoncés dans la section précédente.

Le chapitre 1 a pour but d'introduire les outils fondamentaux et de donner les définitions de base que nous utiliserons en permanence dans la suite : notions d'intersection, définitions classiques sur les feuilletages et leurs chemins transverses, et présentation rapide de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal.

Au chapitre 2, nous énonçons et montrons quelques résultats préliminaires généraux qui nous seront utiles dans la suite : d'abord des résultats liés uniquement aux chemins transverses à un feuilletage, puis des résultats sur les trajectoires et leurs « directions homologiques ».

Le chapitre 3 est consacré aux preuves des théorèmes A (et de son corollaire B) et C (et de ses corollaires D et E). Nous y conduisons une étude générale, dont le plan est détaillé au début du chapitre, menant en particulier à la proposition fondamentale F. De cette étude découlent simultanément les théorèmes A et C.

Enfin, le chapitre 4 est dédié à la preuve du théorème G et de ses corollaires. Y sont faits divers préliminaires utilisant les résultats du chapitre précédent (en particulier la proposition H), puis nous prouvons le théorème G. Ce chapitre se termine avec la preuve des corollaires I, J et K.

Remerciements : Je remercie vivement Patrice Le Calvez d'avoir suivi ce travail, donnant conseils et idées essentiels à sa bonne réalisation. Je remercie aussi François Béguin, Martín Sambarino et Pierre-Antoine Guihéneuf pour leurs relectures attentives et suggestions pertinentes.