PANORAMAS ET SYNTHÈSES 18

# AUTOUR DU CENTENAIRE LEBESGUE

Gustave Choquet
Thierry De Pauw
Pierre de la Harpe
Jean-Pierre Kahane
Hervé Pajot
Bruno Sévennec

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*G. Choquet*
16, Av. d'Alembert, 92160 Antony.

*T. De Pauw*
Université Catholique de Louvain, Chemin du Cyclotron 2,
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique.
*E-mail :* `depauw@math.ucl.ac.be`

*P. de la Harpe*
Section de Mathématiques, Université de Genève, Case postale 64,
CH-1211 Genève 4, Suisse.
*E-mail :* `Pierre.delaHarpe@math.unige.ch`

*J.-P. Kahane*
Université Paris-Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

*H. Pajot*
Université de Grenoble I, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques,
UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères Cédex, France.
*E-mail :* `herve.pajot@ujf-grenoble.fr`

*B. Sévennec*
CNRS, UMPA, ENS-Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07.
*E-mail :* `sevennec@umpa.ens-lyon.fr`
*Url :* `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~sevennec`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 01A60, 11K36, 22C05, 26A39, 26A42, 26B15, 26B20, 28-03, 28A75, 28C10, 30C85, 37A30, 42B20, 43A07, 49Q15, 51-03, 60-03.

***Mots clefs.* —** Capacité analytique, courbure de Menger, ensembles, ensembles à périmètre fini, équirépartition, géométrie, groupe compact, groupe moyennable, histoire, intégrales, intégrale de Cauchy, intégration, mesures, mesures finiment additives, mesure de Haar, mesures de Hausdorff, moyennes invariantes, paradoxes, probabilités, rectifiabilité, rectifiabilité uniforme, théorème de la divergence, trou spectral.

# AUTOUR DU CENTENAIRE LEBESGUE

**Gustave Choquet, Thierry De Pauw, Pierre de la Harpe, Jean-Pierre Kahane, Hervé Pajot, Bruno Sévennec**

***Résumé.*** **—** Ce volume a été écrit à l'occasion du centenaire de la publication en 1901 de la fameuse note de Lebesgue introduisant son intégrale. Il fait suite à une journée de célébration organisée à l'École normale supérieure de Lyon. On y trouvera différents éclairages sur l'héritage de Lebesgue. Le témoignage de Gustave Choquet redonne vie aux mathématiques et mathématiciens de l'époque de Lebesgue. Les textes de Pierre de la Harpe et Bruno Sévennec sur les mesures finiment additives analysent leurs paradoxes et leurs liens avec la notion de moyennabilité ou l'équirépartition. La contribution de Hervé Pajot rend compte des progrès considérables qui ont été faits récemment dans la compréhension de la notion de rectifiabilité, en liaison avec la capacité analytique ou l'opérateur de Cauchy ; celle de Thierry De Pauw part de l'intégrale de Henstock et Kurzweil pour s'intéresser aux généralisations possibles de la formule de la divergence. Enfin, la préface de Jean-Pierre Kahane fait un lien entre tous ces éclairages, en même temps qu'elle lui permet d'évoquer l'influence mathématique de l'intégrale de Lebesgue tout au long du vingtième siècle.

***Abstract*** **(Around the Lebesgue centenary). —** This volume was written on the occasion of the centennial of Lebesgue's Publication in 1901 of his famous Note introducing his integral. It results from a day of celebration at the École normale supérieure de Lyon. It provides various viewpoints on Lebesgue's heritage. Gustave Choquet gives a vivid testimony about mathematics and mathematicians of Lebesgue's era. Contributions by Pierre de la Harpe and by Bruno Sévennec on finitely additive measures analyse their paradoxes and their relationship with amenability or equirepartition. Hervé Pajot relates the recent and considerable progress made in understanding the notion of rectifiability, in relation with the analytic capacity or with the Cauchy operator. Thierry de Pauw, starting from Henstock and Kurzweil's integral, studies possibilities of generalizing the divergence formula. A preface by Jean-Pierre Kahane synthesizes these viewpoints and highlights Lebesgue's influence in the course of the twentieth century.

# TABLE DES MATIÈRES

# RÉSUMÉS DES ARTICLES

*L'intégrale de Lebesgue au cours du vingtième siècle*
Jean-Pierre Kahane ........................................................ 1

L'intégrale de Lebesgue a dominé tout un pan des mathématiques du vingtième siècle : analyse de Fourier et analyse fonctionnelle, probabilités, tous les aspects géométriques, analytiques et logiques de la théorie de la mesure, liés aux groupes, aux variables réelles, à la physique et à presque toutes les sciences mathématiques. L'article expose d'abord le retard de l'enseignement de l'intégrale de Lebesgue en France alors qu'elle est largement diffusée à l'étranger. Puis il donne un tableau historique de certains développements : les espaces $L^p$, les probabilités selon Steinhaus et selon Kolmogorov, la théorie des ensembles, la théorie géométrique de la mesure, les paradoxes de la mesure, et diverses notions d'intégrales. L'intention de l'article est d'établir un pont entre l'article de Choquet, sur les racines de l'intégrale de Lebesgue, et les autres articles, sur des problèmes très actuels qui y sont relatifs.

*Borel, Baire, Lebesgue*
Gustave Choquet ........................................................ 23

L'article développe la matière de la conférence donnée à l'École normale supérieure de Lyon à l'occasion du centenaire de l'intégrale de Lebesgue. Plutôt que de s'étendre sur l'œuvre mathématique de Borel, Baire et Lebesgue, on parle de leur vie, de leur personnalité et de la source de leur inspiration. C'est l'occasion d'évoquer les prédécesseurs, Eudoxe de Cnide, Jordan, et aussi les réactions des contemporains, Hermite, Poincaré, Picard. Parmi les facettes multiples de Lebesgue, on insiste — en citant Lebesgue — sur la nature géométrique de son intuition. Quelques figures éclairent les considérations géométriques exposées à cette occasion.

*Mesures finiment additives et paradoxes*
Pierre de la Harpe ........................................................ 39

Ce texte expose des résultats classiques sur les décompositions paradoxales (Hausdorff, Banach, Tarski) et les mesures finiment additives invariantes (Banach, von Neumann), en insistant sur l'importance de ces notions en théorie des groupes. La dernière partie énumère quinze problèmes ouverts concernant la moyennabilité des groupes.

Dans cet article, on donne un survol de résultats d'équirépartition dans les groupes compacts, et plus généralement dans les espaces homogènes de tels groupes. Dans le premier chapitre, on reproduit la belle preuve de von Neumann sur l'existence et l'unicité de la mesure de Haar des groupes compacts, où l'on voit qu'elle est obtenue comme limite de mesures à support fini, qui « s'équirépartissent » selon la mesure de Haar. Dans le chapitre 2, on donne des exemples explicites d'équirépartition : le théorème de Weyl (1916) sur les rotations irrationnelles, celui d'Arnol'd et Krylov (1963) pour les rotations sur la sphère $\mathbb{S}^2$, et sa généralisation par Guivarc'h (1969). Le chapitre 3 concerne une mesure de la vitesse d'équirépartition des ensembles obtenus par composition d'un nombre fini d'isométries d'un espace métrique compact. C'est le « trou spectral » de l'opérateur de moyenne associé. Enfin le chapitre 4 passe d'abord en revue la construction, due à Lubotzky, Phillips et Sarnak (1986) de rotations de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec trou spectral maximal. Après avoir évoqué l'application de ce résultat au problème de Ruziewicz, on discute d'une construction récente de familles de rotations ayant un trou spectral basée sur des arguments plus élémentaires (Gamburd, Jakobson, Sarnak 1999), et qui soulève des questions de type « approximation diophantienne » dans le groupe des rotations.



Cet article constitue un tour d'horizon des théories d'intégrales conditionnellement convergentes. On y présente l'intégrale de R. Henstock et J. Kurzweil (dimension 1) et celle de W.F. Pfeffer (dimensions supérieures), en centrant l'exposition sur le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral et sur le théorème de la divergence. Chemin faisant, on traite également des ensembles à périmètre fini introduits par E. De Giorgi.



Nous présentons une caractérisation des sous-ensembles des courbes rectifiables de $\mathbb{R}^n$ due à Peter Jones, ainsi que la théorie de la rectifiabilité uniforme développée par Guy David et Stephen Semmes. Nous en donnons ensuite des applications à l'analyse harmonique (continuité $L^2$ de l'opérateur de Cauchy) et à l'analyse complexe (effaçabilité pour les fonctions holomorphes bornées).

# ABSTRACTS

*L'intégrale de Lebesgue au cours du vingtième siècle*



The Lebesgue integral plays a basic role in several parts of modern mathematics : Fourier and functional analysis, probabilities, all aspects of measure theory (geometric, analytic and logical), linked with groups, real variables, physics and almost all parts of the mathematical sciences. The article shows that the diffusion of the Lebesgue integral in France was late compared to other countries. It sketches the historical development of a series of notions : $L^p$ spaces, probabilities from Steinhaus to Kolmogorov set theory, geometric measure theory, paradoxes about measure, and diverse notions of the integral. The article intends to build a bridge between Choquet's, on the historical roots of the Lebesgue integral, and other's articles, on problems of current interest related to this integral.

*Borel, Baire, Lebesgue*



The article develops the content of a talk given at École normale supérieure de Lyon for the hundredth anniversary of the note of Lebesgue dated April 1901. Instead of exposing their results we insist on their lives and mutual relations, their personalities and the sources of their inspiration. We evoke their predecessors Eudoxus of Cnidus, Jordan and Cantor, and also the reactions of Hermite, Poincaré and Picard towards the orientation of their works. We insist on the geometrical aspect of Lebesgue's intuition. A few geometric considerations are illustrated by figures.

*Mesures finiment additives et paradoxes*



This is an exposition of classical results on paradoxical decompositions (Hausdorff, Banach, Tarski) and invariant finitely additive measures (Banach, von Neumann) which stresses the importance of theses notions for group theory. The last part contains fifteen open problems on amenability for groups.

This paper surveys some equidistribution results in compact groups and their homogeneous spaces. The first chapter is devoted to von Neumann's beautiful proof of the existence and uniqueness of Haar's measure on compact groups, where one sees that it is obtained as a limit of "equidistributing" measures with finite supports. Some explicit examples are reviewed in chapter 2 : Weyl's theorem on irrational rotations (1916), Arnol'd and Krylov's (1963) concerning rotations of the sphere $\mathbb{S}^2$ and its generalization by Guivarc'h (1969). Chapter 3 is devoted to a quantity measuring the equidistribution speed of sets obtained by composing a finite number of isometries of a compact space, the "spectral gap" of the associated averaging operator. In the last chapter, one first reviews the construction by Lubotzy, Phillips and Sarnak (1986) of rotations of $\mathbb{S}^2$ with maximal spectral gap. The application of this result to Ruziewicz's problem is then sketched, before going to the recent construction of families of rotations with spectral gap by Gamburd, Jakobson, Sarnak (1999). It relies on more elementary methods than the previous one, and suggests questions of "diophantine approximation" type in rotations group.



This paper is a survey of conditionally convergent integrals. We introduce the one-dimensional theory of R. Henstock and J. Kurzweil as well as the higher-dimensional theory due to W.F. Pfeffer. Central to our exposition are the fundamental theorem of calculus and the divergence theorem. Along the way we also study sets of finite perimeter as defined by E. De Giorgi.



We present the characterization of subsets of rectifiable curves in $\mathbb{R}^n$ given by Peter Jones, and also the theory of uniform rectifiable sets as developed by Guy David and Stephen Semmes. We then give applications to harmonic analysis ($L^2$ continuity of the Cauchy operator) and complex analysis (removability for bounded analytic functions).

# AVANT-PROPOS

Les textes rassemblés dans ce volume proviennent en partie des exposés faits à l'École normale supérieure de Lyon lors de la rencontre des 27 et 28 avril 2001, intitulée « La mesure de Lebesgue a 100 ans ! ». Le volume s'est ensuite enrichi des contributions de Hervé Pajot et Thierry de Pauw qui éclairent, chacune à leur manière, l'histoire récente de la mesure de Lebesgue. On trouvera en annexe la Note aux Compte rendus de l'Académie des Sciences de Henri Lebesgue dont on fêtait le centenaire à cette occasion.

Jean-Pierre Kahane a préfacé l'ouvrage. Qu'il soit remercié ici, ainsi que les auteurs, qu'ils aient été présents ou non à la rencontre de Lyon, et les organiseurs de celle-ci.

Le document photographique présenté aux pages 17 à 22 provient des Archives de l'Académie des sciences, et son intérêt historique dépasse son contenu émotionnel, qui n'est pas négligeable. On y voit la façon dont une note manuscrite était traitée par le présentateur, en l'occurrence Émile Picard, et par l'imprimeur, Gauthier-Villars. L'écriture est claire, mais Lebesgue multiplie les ratures et les additions. La note est acceptée telle quelle, à la place près d'une référence à un article de Baire. On voit quatre noms dans les marges de gauche, et on voit que l'article est décomposé au moyen de traits horizontaux en quatre parties. Ces traits et cette décomposition sont le fait de l'imprimeur, qui a confié à quatre ouvriers typographes le soin de la composition, pour aller vite. Jusque dans le courant des années 1950, il était possible de déposer une note aux *Comptes rendus* le lundi après-midi et de corriger les épreuves chez Gauthier-Villars, le mercredi matin.

Le comité de rédaction

*Panoramas & Synthèses*
**18**, 2004, p. 1–16

# L'INTÉGRALE DE LEBESGUE AU COURS DU VINGTIÈME SIÈCLE

*par*

Jean-Pierre Kahane

***Résumé.*** — L'intégrale de Lebesgue a dominé tout un pan des mathématiques du vingtième siècle : analyse de Fourier et analyse fonctionnelle, probabilités, tous les aspects géométriques, analytiques et logiques de la théorie de la mesure, liés aux groupes, aux variables réelles, à la physique et à presque toutes les sciences mathématiques. L'article expose d'abord le retard de l'enseignement de l'intégrale de Lebesgue en France alors qu'elle est largement diffusée à l'étranger. Puis il donne un tableau historique de certains développements : les espaces $L^p$, les probabilités selon Steinhaus et selon Kolmogorov, la théorie des ensembles, la théorie géométrique de la mesure, les paradoxes de la mesure, et diverses notions d'intégrales. L'intention de l'article est d'établir un pont entre l'article de Choquet, sur les racines de l'intégrale de Lebesgue, et les autres articles, sur des problèmes très actuels qui y sont relatifs.

***Abstract* (The Lebesgue integral during the twentieth century).** — The Lebesgue integral plays a basic role in several parts of modern mathematics: Fourier and functional analysis, probabilities, all aspects of measure theory (geometric, analytic and logical), linked with groups, real variables, physics and almost all parts of the mathematical sciences. The article shows that the diffusion of the Lebesgue integral in France was late compared to other countries. It sketches the historical development of a series of notions: $L^p$ spaces, probabilities from Steinhaus to Kolmogorov set theory, geometric measure theory, paradoxes about measure, and diverse notions of the integral. The article intends to build a bridge between Choquet's, on the historical roots of the Lebesgue integral, and other's articles, on problems of current interest related to this integral.

## 1. La vision actuelle

Vue d'aujourd'hui, l'intégrale de Lebesgue domine tout un pan des mathématiques du vingtième siècle : l'analyse de Fourier et l'analyse fonctionnelle, la théorie des probabilités, la théorie géométrique de la mesure, la théorie des ensembles mesurables et les différentes théories de la mesure et de l'intégration, liées aux groupes, aux

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 01A60, 28-03, 60-03.
***Mots clefs.*** — Intégrales, mesures, ensembles, probabilités.

variables réelles, à la physique et par là à presque tout le reste des sciences mathématiques.

C'est cette vision que je vais essayer de commenter et de discuter à partir des textes et de mon expérience personnelle. L'ensemble des articles qui suivent en constitue une excellente illustration sur quelques points de grande importance historique ou d'intérêt actuel. Il faudra sans doute réviser cette vision à l'avenir, comme toute vision que l'on a des mathématiques à un instant donné. Mais elle paraît aujourd'hui solidement fondée.

## 2. Le retard en France

Pourtant cette vision a mis longtemps à s'imposer en France. Il y a un demi-siècle, on pouvait être agrégé de mathématiques et docteur sans connaître la mesure ni l'intégrale de Lebesgue, ni d'ailleurs la transformation de Fourier ni la loi de Gauss. La situation était différente à l'étranger. C'est dans les monographies polonaises des années trente que l'intégrale de Lebesgue est le plus clairement utilisée et exposée : Banach et Zygmund ont été pour moi, à la fin des années quarante, la première révélation de la puissance de l'outil, et Saks ensuite de la beauté du concept. Au début des années cinquante, c'est le livre de Riesz et Nagy qui a rendu l'intégrale de Lebesgue familière à un public français assez large.

Quels étaient les obstacles ? J'en vois de trois ordres : la fidélité à l'ordre établi par l'intégrale de Riemann, la novation issue du théorème de F. Riesz qui permettait de considérer les mesures bornées comme formes linéaires sur un espace de fonctions continues, et enfin l'attitude même de Lebesgue. Il vaut la peine de bien regarder ces obstacles, et d'en apprécier la valeur.

**2.1. La fidélité à l'intégrale de Riemann.** — Le dix-neuvième siècle avait solidement établi des notions auparavant confuses : la convergence des séries, la continuité des fonctions, la différentiabilité. Des définitions précises en avaient été données. L'intégrabilité semblait une notion indispensable à définir. Lorsque Dirichlet établit en 1829 le premier théorème général sur les séries de Fourier, il s'inquiète précisément de l'intégrabilité des fonctions intervenant dans les formules de Fourier : c'est alors qu'il produit son célèbre exemple d'une fonction qui prend deux valeurs différentes sur les rationnels et sur les irrationnels. Pour lui, alors, l'intégration nécessite la continuité sur des sous-intervalles constituant un ouvert dense ; c'est la conception de Cauchy : on intègre la fonction continue sur un intervalle, et on passe à la limite aux bornes si nécessaire. Puis, en 1854, c'est Riemann qui, à l'occasion de sa thèse sur les séries trigonométriques, donne sa définition, en dix lignes, avec en prime une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité qui, traduite par Lebesgue, signifie que l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle. Cette thèse n'est publiée qu'après la mort de Riemann, en 1867. Mais, dès qu'elle est connue, la définition de Riemann est unanimement adoptée, comme exprimant l'essence même de l'intégrabilité. En voici un témoignage : quand, en 1881, Camille Jordan introduit les fonctions à variation bornée pour étendre le théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier, il vérifie qu'elles sont intégrables au sens de Riemann, puis il construit un exemple de fonction à variation bornée qui n'est continue sur aucun intervalle, et il l'orne de ce commentaire : « *Dirichlet dit dans son mémoire... qu'une fonction qui présente un nombre infini de discontinuités n'est intégrable que si, dans un intervalle quelconque* $[a\,, b]$*, on peut placer deux quantités* $r, s$*, assez rapprochées pour que la fonction reste continue de* $r$ *à* $s$*. On voit, par l'exemple qui précède, que cette assertion n'est pas exacte. Cette inadvertance d'un géomètre si justement considéré comme un modèle de précision nous paraît mériter d'être signalée* ». Nous sommes capables aujourd'hui de distinguer plusieurs notions d'intégrabilité, et de récuser le reproche d'inadvertance fait à Dirichlet. Mais, pour Jordan et tous les mathématiciens de son temps, le concept de fonction intégrable avait trouvé sa forme définitive avec Riemann. Le témoignage le plus probant est celui de Lebesgue lui-même ; pour parler de fonctions intégrables en son sens, il invente un vocable : « sommable ». En France tout au moins, l'intégrale de Riemann semble dans la nature des choses, elle est bien établie, enseignée, et elle donne satisfaction pour l'essentiel. Telle est encore la situation il y a cinquante ans.

### 2.2. La mesure selon Bourbaki et les distributions de Schwartz

Il y a pourtant d'excellents exposés en français sur l'intégrale de Lebesgue : la thèse de Lebesgue d'abord, puis l'exposé synthétique qu'il en fait dans ses leçons sur les séries trigonométriques, et, à partir de 1915, le traité de Charles de la Vallée Poussin sur mesure, intégrale, et classes de Baire. André Weil publie en 1940 son livre sur l'intégration dans les groupes topologiques. Sous son influence sans doute, Bourbaki s'engage dans une présentation de la théorie de la mesure qui a attiré bien des critiques, parce qu'elle subordonne au lieu de les séparer la mesure à la topologie : les mesures bornées, sur des espaces compacts, sont des formes linéaires continues sur l'espace des fonctions continues sur ce compact. C'est un procédé pour introduire mesures et intégrales auquel on renonce maintenant, pour donner toute sa valeur au lien entre mesures et probabilités. Mais il a au moins un mérite historique : Laurent Schwartz a trouvé la bonne définition des distributions à partir de là, comme formes linéaires sur des espaces convenables de fonctions tests. Or, précisément il y a cinquante ans, Schwartz répandait l'usage des distributions à travers ses cours de méthodes mathématiques de la physique. La novation en analyse, c'était les distributions, et non l'intégrale de Lebesgue. Mon souvenir personnel est très clair là-dessus.

Ainsi, en 1954, la culture mathématique ambiante parmi les jeunes mathématiciens en France incluait l'intégrale de Riemann comme matière scolaire et les distributions de Schwartz comme nouveauté sulfureuse. L'intégrale de Lebesgue était un peu perdue entre les deux. Elle était bien enseignée, en Analyse supérieure, par Favard, elle était