LAURENT LAFFORGUE

Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson

Astérisque, tome 243 (1997)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1997__243__1_0>

243 ASTÉRISQUE

1997

CHTOUCAS DE DRINFELD ET CONJECTURE DE RAMANUJAN-PETERSSON

Laurent LAFFORGUE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Laurent Lafforgue (Equipe de recherche associée D0752 du CNRS).

Mots-clés : géométrie algébrique arithmétique, corps de fonctions, variétés modulaires de Drinfeld, représentations automorphes, opérateurs de Hecke, formule des points fixes, formule des traces de Selberg.

Code matière AMS 1980 (version 1985) : 11 G, 14 G 25, 11 G 09, 11 F 70, 11 F 60, 14 F 20, 11 F 72.

Table des matières

Introduction

L'objet principal de ce livre est la conjecture de Ramanujan–Petersson sur les corps de fonctions. Rappelons de quoi il s'agit.

On considère F un corps de fonctions dont le corps des constantes $\mathbb{F}_q$ est fini à q éléments, F_x les complétés de F en les différentes places x, $\deg_x$ les valuations associées et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F.

Toute représentation admissible irréductible π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $r \geq 1$, est un produit $\bigotimes_x \pi_x$ de représentations admissibles irréductibles des $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Pour presque toute x, π_x est non ramifiée et il existe dans $\mathbb{C}^\times$ r nombres $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$, bien définis à permutation près, tels que π_x soit un sous-quotient de l'induite normalisée du caractère $(q^{\frac{1-r}{2}\deg(x)} z_1(\pi_x))^{\deg_x(\cdot)} \times \cdots \times (q^{\frac{1-r}{2}\deg(x)} z_r(\pi_x))^{\deg_x(\cdot)}$ de $\mathrm{GL}_1(F_x) \times \cdots \times \mathrm{GL}_1(F_x)$. Quand π_x est unitaire, la famille $\{|z_1(\pi_x)|, \ldots, |z_r(\pi_x)|\}$ dans $\mathbb{R}_+^\times$ est symétrique par rapport à $q^{\frac{r-1}{2}\deg(x)}$.

D'autre part, à toutes représentations automorphes cuspidales irréductibles unitaires π, π' de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, $r, r' \geq 1$, est associée la fonction $s \mapsto L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ de Rankin-Selberg. C'est une fonction rationnelle en q^s dont les pôles sont sur les droites $\mathrm{Re}\, s = 0$, $\mathrm{Re}\, s = 1$.

Les deux conjectures suivantes sont bien connues :

CONJECTURE 1 (Ramanujan-Petersson). — *Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. *Alors, en toute place x où π est non ramifiée, on a $|z_i(\pi_x)| = q^{\frac{r-1}{2}\deg(x)}$, $1 \leq i \leq r$.*

CONJECTURE 2. — *Soient π, π' deux représentations automorphes cuspidales irréductibles unitaires de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$. *Alors tous les zéros de la fonction $s \mapsto L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ sont sur la droite* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Rappelons que Drinfeld a successivement prouvé la conjecture 1 (et même en fait la correspondance de Langlands) dans les cas suivants :

• quand une des composantes π_x de π est la représentation de Steinberg et $r = 2$, en étudiant la cohomologie à coefficients constants des variétés modulaires classifiant les faisceaux elliptiques de rang 2 (et ce travail a été généralisé par Laumon en rang quelconque) ;

• quand une des composantes π_x de π est supercuspidale et $r = 2$, en étudiant la cohomologie à coefficients dans certains systèmes locaux des variétés modulaires classifiant les faisceaux elliptiques de rang 2 (et ce travail a été généralisé par Flicker et Kazhdan en rang quelconque) ;

• quand $r = 2$, en étudiant la cohomologie des variétés modulaires classifiant les chtoucas de rang 2.

Rappelons d'autre part que dans la situation de la conjecture 1, Jacquet et Shalika ont obtenu l'encadrement $q^{-\frac{1}{2}\deg(x)} < q^{\frac{1-r}{2}\deg(x)}|z_i(\pi_x)| < q^{\frac{1}{2}\deg(x)}$, $1 \leq i \leq r$, et que dans la situation de la conjecture 2, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shahidi et Shalika ont montré que les zéros de la fonction L envisagée sont dans la bande $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$.

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME PRINCIPAL. —

(i) *Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Alors :*

- *Si r est impair, π vérifie la conjecture 1 et on pose $\varepsilon_\pi = 0$.*
- *Si r est pair, ou bien π vérifie la conjecture 1 et on pose $\varepsilon_\pi = 0$, ou bien pour toute place x où π est non ramifiée, la moitié parmi les $z_i(\pi_x)$, $1 \leq i \leq r$, sont de module $q^{(\frac{r-1}{2}+\frac{1}{4})\deg(x)}$ et l'autre moitié de module $q^{(\frac{r-1}{2}-\frac{1}{4})\deg(x)}$ et on pose $\varepsilon_\pi = \frac{1}{4}$.*

(ii) *Pour deux telles représentations π, π' de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, tous les zéros de $L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ sont sur la droite $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ si $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi'}$ et sur les droites $\mathrm{Re} s = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Re} s = \frac{3}{4}$ si $\varepsilon_\pi \neq \varepsilon_{\pi'}$.*

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle de Drinfeld en rang 2. On s'intéresse aux modules d'éléments $\{z_i(\pi_x)\}$ et $\{q^s, L(s, \pi \otimes \check{\pi}') = 0\}$. L'idée est de relier ces derniers aux valeurs propres de l'opérateur de Frobenius agissant sur la cohomologie à supports compacts d'une certaine variété de type fini sur $\mathbb{F}_q$ (en combinant le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et une formule des traces d'Arthur-Selberg convenable) et d'invoquer le théorème de pureté de Deligne. Drinfeld a introduit des objets permettant de réaliser ce projet. Ce sont les variétés (ou plutôt les champs) classifiant les chtoucas de rang r.

Ce livre rassemble la thèse de l'auteur (Orsay, 1994) et une prépublication ultérieure (Orsay, 1995). Un résumé en a été présenté dans deux notes parues aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (tome 322, série I, 1996).

En voici le contenu détaillé :

On commence dans le chapitre I par rappeler la définition des chtoucas ainsi que les principales propriétés géométriques de leurs champs classifiants.

Soit X la courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$ dont le corps des fonctions est F. Par souci de généralité et suivant une idée de Stuhler, on introduit également D une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F et $\mathcal{D}$

une $\mathcal{O}_X$–Algèbre finie de fibre générique D qui soit maximale pour cette propriété.

Un $\mathcal{D}$–chtouca de rang r sur un schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) est un diagramme

$$\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} {}^{\tau}\mathcal{E}$$

où $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–Modules à droite localement libres de rang r sur $X \times S$, ${}^{\tau}\mathcal{E}$ désigne le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–Module $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{E}$, et j et t sont des homomorphismes $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–linéaires, injectifs et dont les conoyaux sont supportés respectivement par les graphes de morphismes pôle $i_\infty : S \to X$ et zéro $i_0 : S \to X$ et sont localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$–Modules.

Etant donné $I \hookrightarrow X$ un sous–schéma fermé fini évitant le zéro et le pôle, une structure de niveau I sur un tel $\mathcal{D}$–chtouca consiste en la donnée d'isomorphismes $\mathcal{E}_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S$, $\mathcal{E}'_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S$ compatibles avec j et t.

On généralise les résultats de [Drinfeld, 1987] en s'inspirant des arguments de [Laumon, Rapoport, Stuhler]. On prouve que les champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ classificant les $\mathcal{D}$–chtoucas de rang r avec structure de niveau I sont algébriques au sens de Deligne–Mumford. L'application qui à un $\mathcal{D}$–chtouca associe son zéro et son pôle définit des morphismes $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \to X \backslash I \times X \backslash I$ qui sont localement de type fini et même lisses de dimension relative $2(rd-1)$ au–dessus de $X' \backslash I \times X' \backslash I$, où l'on note X' le plus grand ouvert de X en tous les points fermés duquel l'algèbre D est déployée. Et pour tous sous–schémas fermés finis emboîtés $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$, le foncteur d'oubli $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ au–dessus de $X \backslash J \times X \backslash J$ est représentable fini étale galoisien.

En notant Λ le schéma complémentaire dans $X \times X$ de la diagonale et de ses transformées par les puissances de $(\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X)$ et de $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X)$, on dispose dans les $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ de deux morphismes de Frobenius partiels Frob_0 et Frob_∞ au–dessus des endomorphismes $(\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X)$ et $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X)$ de Λ. Leur composé dans un sens ou dans l'autre est le morphisme de Frobenius.

Soient $a \in \mathbb{A}^\times$ un idèle de degré 1, $\mathcal{D}_\mathbb{A}$ l'ordre maximal dans $D_\mathbb{A} = D \otimes_F \mathbb{A}$ qui correspond à $\mathcal{D}$, G le schéma en groupes sur F des automorphismes de $E = D^r$, K le sous–groupe ouvert compact maximal $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_\mathbb{A})$ de $\mathrm{GL}_r(D_\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})$, $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A})$ c'est–à–dire l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact de $G(\mathbb{A})$ dans $\mathbb{Q}$ et, pour tout $I \hookrightarrow X$, $\mathcal{H}_I$ la sous–algèbre des fonctions invariantes à gauche et à droite par $K_I = \mathrm{Ker}[K \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)]$.

Alors on dispose sur le champ représentable $\varprojlim_I \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^\mathbb{Z}$ d'une action à droite de $G(\mathbb{A})$. Elle est équivalente à la donnée, pour tout $I \hookrightarrow X$, d'un