Astérisque

JOSEPH AYOUB

Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (II)

Astérisque, tome 315 (2007)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2007__315__1_0>

ASTÉRISQUE 315

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE (II)

Joseph Ayoub

Société Mathématique de France 2007
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Ayoub
LAGA, Université Paris 13, CNRS.
E-mail : `ayoub@math.univ-paris13.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14-02, 14C25, 14F20, 14F35, 14F42, 18A40, 18F10, 18F20, 18F25, 18G55, 19E15.

Mots clefs. — Motifs, six opérations de Grothendieck, dualité de Verdier, cycles évanescents, $\mathbb{A}^1$-homotopie des schémas, catégories de modèles.

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE (II)

Joseph Ayoub

Résumé. — Ce deuxième volume regroupe les chapitres **3** et **4** de notre étude de la fonctorialité des catégories homotopiques stables des schémas. Dans le volume précédent, nous nous sommes concentrés sur les six opérations f^*, f_*, $f_!$, $f^!$, $-\otimes-$ et $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$ et leurs propriétés de constructibilité et d'exactitude.

On commence ce volume par la construction des foncteurs motifs proches Ψ_f, analogues motiviques des foncteurs cycles proches bien connus en cohomologie étale. On étend ensuite le formalisme des cycles évanescents à ces foncteurs. En particulier, on calcule l'effet du foncteur Ψ_f dans le cas où f est à réduction semi-stable. On montre aussi que les Ψ_f préservent les motifs constructibles, qu'ils commutent au produit tensoriel extérieur et aux foncteurs de dualité. On définit ensuite un opérateur de monodromie et on montre qu'il est nilpotent.

Le dernier chapitre, de nature différente des trois autres, reprend en détails la construction de la catégorie homotopique stable des S-schémas.

***Abstract* (The Grothendieck six operations and the vanishing cycles formalism in the motivic world (II))**

This second volume contains chapter **3** and **4** of our study of the functoriality of the stable homotopy categories of schemes. In the previous volume, we concentrated on the six operations f^*, f_*, $f_!$, $f^!$, $-\otimes-$ and $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$, their constructibility and exactness.

This volume begins with the construction of the nearby motive functors Ψ_f which are the analogue of the nearby cycles functors, well-known in étale cohomology. We then extend the vanishing cycles formalism to these functors. In particular, we compute the effect of the functor Ψ_f in the case where f has semi-stable reduction. We show also that Ψ_f preserve constructible motives and commute with external tensor product and duality. We then define a monodromy operator and prove that this operator is nilpotent.

The last chapter, which is of different nature than the previous ones, recall in full details the construction of the stable homotopy category of S-schemes.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 3

LA THÉORIE DES FONCTEURS CYCLES PROCHES DANS UN CADRE MOTIVIQUE

Introduction

On a vu dans le premier volume que l'on disposait dans le monde motivique du formalisme des six opérations de Grothendieck, à savoir f^*, f_*, $f_!$, $f^!$, $\otimes$ et $\underline{\mathsf{Hom}}$. Il est alors naturel de se demander si l'on dispose également de la septième opération, à savoir les foncteurs cycles proches Ψ. Le présent chapitre est consacré à la construction et à l'étude des foncteurs cycles proches motiviques. Pour rester fidèle à l'esprit de ce travail, on a évité de se restreindre aux cas des 2-foncteurs homotopiques stables **SH** ou **DM**. Malheureusement, pour définir les foncteurs Ψ, il est nécessaire de sortir de la catégorie des schémas. Ceci ne pose pas de problèmes lorsqu'on considère **SH** ou **DM** puisqu'on peut faire les constructions nécessaires au niveau des catégories de modèles. Une solution satisfaisante est de travailler dans un dérivateur algébrique plutôt que dans un 2-foncteur homotopique. Au début, le prix peut paraître cher, mais en réalité on gagne beaucoup à travailler dans une telle généralité. En effet, parmi les avantages on peut noter :

- Notre construction s'applique ainsi à la plupart des 2-foncteurs homotopiques stables connus. En particulier on peut l'appliquer en cohomologie étale, en théorie de Hodge, etc. Ceci peut être particulièrement intéressant si on s'intéresse à la compatibilité de notre définition avec les réalisations.
- Le fait de travailler dans un cadre abstrait facilite les problèmes de cohérence. Ainsi, la construction de la structure pseudo-monoïdale sur les Ψ_f se fait beaucoup plus facilement que si l'on avait travaillé avec des modèles.

Un autre point à retenir sur ce chapitre est la théorie des systèmes de spécialisation. En effet, la plupart des théorèmes importants sur les foncteurs Ψ seront plus ou moins des traductions des résultats sur des systèmes de spécialisation généraux. Faisons un bref aperçu de ce chapitre :

1- Dans la section 3.1, on introduit la notion centrale de systèmes de spécialisation. Il s'agit en gros d'une généralisation des propriétés formelles de commutation avec les opérations f^* et f_* vérifiées par les foncteurs Ψ_f en cohomologie étale. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la définition 3.1.1. On s'intéresse ensuite à quelques problèmes de cohérence et on définit la notion de système de spécialisation pseudo-monoïdale puis on en dérive quelques conséquences.

2- Dans la section 3.2, on décrit un procédé de construction des systèmes de spécialisation. Plus précisément, on montre comment la donnée d'un diagramme de schémas permet de construire à partir d'un système de spécialisation donné, un nouveau système de spécialisation. Là, évidement, il faut que le système de spécialisation de départ soit défini entre deux dérivateurs algébriques (voir la définition 3.2.1 pour plus de détails). Notre construction des foncteurs cycles proches sera un cas particulier de ce procédé.

3- La section 3.3 est sans doute le cœur de ce chapitre. C'est ici qu'on fera le calcul fondamental, à savoir le théorème 3.3.10, sur lequel reposent tous les résultats importants sur les systèmes de spécialisation et les foncteurs cycles proches. Pour expliquer de quoi il s'agit, on raisonne en cohomologie étale et on considère le premier cas non trivial. On se donne un schéma strictement hensélien S de point générique η et de point fermé s. Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe semi-stable, génériquement lisse et de fibre spéciale X_s réunion de deux branches D_1 et D_2. On voudrait calculer le complexe de faisceaux étale $\mathsf{R}\Psi_f\Lambda$. Le théorème 3.3.10, nous dit que la restriction à D_1 du complexe $\mathsf{R}\Psi_f\Lambda$ est isomorphe à $\mathsf{R}v_{1*}\Lambda$ avec v_1 l'inclusion de $D_1 - (D_1 \cap D_2)$ dans D_1. Ce résultat sera donc généralisé à n'importe quel système de spécialisation entre deux 2-foncteurs homotopiques stables avec f semi-stable à un nombre arbitraire de branches (voir le théorème 3.3.10 pour plus de détails). Comme conséquence de ce calcul, on obtient un théorème d'unicité (voir les théorèmes 3.3.4, 3.3.46 et 3.3.46) donnant un critère simple pour décider si un morphisme de systèmes de spécialisation est un isomorphisme. De même, on obtient un critère simple pour la constructibilité et la ${}^pt$-exactitude à gauche des systèmes de spécialisation (voir le théorème 3.3.6 et les corollaires 3.3.49 et 3.3.50).

4- Les sections 3.4 et 3.5 sont consacrées à la définition et à l'étude de deux systèmes de spécialisation Υ et Ψ. Les Υ_f sont appelés les foncteurs cycles proches unipotents tandis que les Ψ_f sont les foncteurs cycles proches totaux. Ce sont ceci qui jouent le rôle des foncteurs cycles proches classiques en cohomologie étale. On prouvera que Ψ_f envoie un objet constructible sur un objet constructible, qu'il commute à la dualité et au produit tensoriel extérieur.

5- On termine ce chapitre par une section consacrée à la construction d'un 2-triangle distingué de monodromie pour les foncteurs cycles proches unipotents (à coefficients rationnels) :

$$\Upsilon_?(-1)[-1] \longrightarrow \chi_? \longrightarrow \Upsilon \xrightarrow{N} \Upsilon_?(-1)$$

La flèche N est l'opérateur de monodromie pour les cycles proches unipotents. La construction de ce 2-triangle passe par un système de spécialisation auxiliaire log qu'on appellera le système de spécialisation logarithmique. Il est démontré, sous les bonnes hypothèses, que que log est isomorphe à Υ. Ainsi, la définition de log fournit une deuxième construction des cycles proches. Il est important de noter, que cette construction n'utilise pas le formalisme des dérivateurs algébriques. Par contre, on est obligé de travailler dans un 2-foncteur homotopique stable $\mathbb{Q}$-linéaire (vérifiant quelques conditions techniques supplémentaires).

3.1. Les systèmes de spécialisation : définition et propriétés de cohérence

Dans cette section, on introduit la notion de système de spécialisation entre deux 2-foncteurs homotopiques stables. On verra dans ce chapitre beaucoup d'exemples de systèmes de spécialisation. L'exemple des foncteurs cycles proches est probablement le plus intéressant. Toutefois, un grand nombre de résultats sur les cycles proches sont en fait des résultats généraux sur les systèmes de spécialisation. On verra à plusieurs reprises, comment cette généralité portera des fruits même en ce qui concerne des questions spéciales aux foncteurs cycles proches.

3.1.1. Définition et premiers exemples. — On suppose donné un diagramme de schémas noethériens admettant une famille ample de fibrés en droite :

(1)
$$\eta \xrightarrow{j} B \xleftarrow{i} \sigma$$

ainsi que deux 2-foncteurs homotopiques stables :

$$\mathsf{H}_1 : \mathsf{Sch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{TR} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{H}_2 : \mathsf{Sch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible (et il n'y en aura jamais !) on notera par les mêmes symboles : f^*, f_*, $f_!$ et $f^!$ les quatre opérations relativement à H_1 ou à H_2.

Définition 3.1.1. — *Un* système de spécialisation sp *(au-dessus de (B, j, i)) de* H_1 *vers* H_2 *est l'ensemble des données suivantes :*

(SPE1) : *pour chaque diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

(2)
$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"'] & X \arrow[d, "f"] & X_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\ \eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

d'un foncteur triangulé $\mathsf{sp}_f : \mathsf{H}_1(X_\eta) \longrightarrow \mathsf{H}_2(X_\sigma)$,