# Michel Raynaud

1938 - 2018

• L. Illusie

Ce texte est la traduction d'un article paru dans le numéro de janvier 2019 (volume 66, numéro 1) des Notices of the American Mathematical Society. Nous remercions l'AMS pour son aimable autorisation de publier la traduction française dans ce numéro de la *Gazette*.

@ Fred Hullin - COMPAS Université Paris-Sud

Michel Raynaud est né à Riom (Puy-de-Dôme) le 16 juin 1938. Ses parents, dont il est le fils unique, habitaient la station thermale de Châtel-Guyon, à quelques kilomètres au nord-ouest. Son père était menuisier, et sa mère, femme de ménage. Michel va à l'école primaire à Châtel-Guyon, puis au collège à Riom. Il effectue le reste de sa scolarité comme pensionnaire au lycée de Clermont-Ferrand. Il y prépare le concours d'entrée à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, où il est reçu en 1958. J'y entre moi-même l'année suivante, et c'est là que nous faisons connaissance. Je me rappelle qu'il m'avait impressionné par l'aisance avec laquelle il avait assimilé le livre de Lang sur les variétés abéliennes et les premiers volumes des EGA [7, 6], qui venaient de paraître. Ce fut le début d'une amitié qui dura jusqu'à sa mort.

En 1961, il est reçu premier à l'agrégation. À l'issue d'une quatrième année à l'École, il est admis au CNRS, où il restera jusqu'en 1967. Entre-temps, il a rencontré Michèle Chaumartin, entrée à l'École normale supérieure de jeunes filles en 1958. Il l'épouse en 1962. Ils auront un fils, Alain, né en 1970, qui habite aujourd'hui en Californie, avec sa femme et ses deux filles.

En 1962, Michel et Michèle commencent à suivre le cours de Serre au Collège de France et le séminaire de géométrie algébrique de Grothendieck [37, 38, 39] à l'IHÉS. Grothendieck devient leur patron de thèse, et ils contribueront à plusieurs de ses séminaires (SGA 3 et 6 pour Michel, SGA 1, 2 et 7 pour Michèle). Après avoir rejeté diverses suggestions que Grothendieck lui avait faites, Michel choisit son propre sujet pour sa thèse, et la soutient en 1968 [23]. Dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck écrit : « Michel Raynaud prend une place à part, ayant trouvé par lui-même les questions et notions essentielles qui font l'objet de son travail de thèse, qu'il a de plus développé de façon entièrement indépendante ; mon rôle de "directeur de thèse" proprement dit s'est donc borné à lire la thèse terminée, à constituer le jury et à en faire partie ». Il est nommé professeur à Orsay en 1967. Il y fera toute sa carrière, jusqu'à sa retraite en 2001.

Raynaud était modeste. Il n'aimait pas les honneurs. Il en recevra cependant plusieurs. En 1970, il est conférencier invité au Congrès international de Nice [33]. En 1987, le prix Ampère lui est décerné. Il est élu Membre correspondant de l'Académie des sciences en 1994. En 1995, il reçoit, conjointement avec David Harbater, le Frank Nelson Cole Prize, pour la démonstration de la conjecture d'Abhyankar. À l'occasion de son départ à la retraite, une conférence en son honneur intitulée *Algebraic Geometry and Applications to Number Theory* s'est tenue à Orsay du 18 au 22 juin 2001.

Raynaud était la figure emblématique de notre département. En 1976, il fonde l'*Équipe d'arithmétique et géométrie algébrique*, une unité associée au CNRS, dont il assure la direction jusqu'en 1983. Il m'en confie alors la responsabilité. En 1985, nous créons ensemble le SAGA (Séminaire d'arithmétique et géométrie algébrique), qui devient rapidement attractif, et est encore très actif aujourd'hui.

Raynaud arrivait à son bureau tous les matins à 7h. On venait de toute part le consulter, parfois de fort loin. Mais son travail de recherche ne l'empêchait pas de prendre l'enseignement très au sérieux. Il a enseigné à tous les niveaux, et dirigé dix thèses. Ses élèves se rappellent sa générosité, et son exigence de rigueur, empreinte de bienveillance.

Modèles de clarté, ses cours ont marqué des générations d'étudiants. Il a été responsable du département d'enseignement pendant de nombreuses années. Avec Guy Henniart, il a mis en place une préparation à l'agrégation en deux ans, qui a connu un grand succès, et à laquelle ses anciennes étudiantes Lucile Bégueri et Renée Elkik, devenues ses collègues à Orsay, ont activement participé.

Raynaud a joué un rôle important dans le développement de nos relations avec le Japon et la Chine. Son étudiant chinois Xiao Gang, mort prématurément en 2014, a créé toute une école de géométrie complexe à Shanghai. Avec Tetsuji Shioda, Raynaud organise en 1982 une conférence franco-japonaise de géométrie algébrique à Tokyo et Kyoto [35], qui sera le point de départ d'une durable et fructueuse collaboration entre les géomètres algébristes des deux pays. Il se rendra plusieurs fois au Japon. Il ira aussi une fois en Chine, au printemps 2004. Dans le cadre d'un programme de coopération supervisé par Jean-Marc Fontaine, et avec l'aimable assistance de notre collègue chinois Yi Ouyang, Michel et moi avons alors donné un cours à l'université de Tsinghua, à l'issue duquel nous avons sélectionné des étudiants pour poursuivre leurs études à Orsay. Son dernier étudiant en thèse, Jilong Tong, est l'un d'eux. D'autres vinrent par la suite, et bon nombre d'entre eux sont maintenant professeurs d'université en Chine. Cet échange de 2004 en a suscité beaucoup d'autres depuis.

L'œuvre de Raynaud est vaste et porte sur de nombreux sujets. Je me bornerai à de brefs commentaires sur les points qui me paraissent les plus saillants.

## 1. La conjecture de Manin-Mumford

Raynaud a démontré la généralisation suivante de cette conjecture. Soit $A$ une variété abélienne sur un corps algébriquement clos $k$ de caractéristique zéro, et soit $X$ un sous-schéma fermé intègre de $A$. Notons $T$ le sous-groupe de torsion de $A(k)$. Si $T \cap X(k)$ est Zariski dense dans $X$, alors $X$ est translaté d'une sous-variété abélienne de $A$ [1]. Raynaud traite d'abord le cas où $X$ est une courbe [21], par des techniques de réduction modulo $p^2$, puis le cas général [30], à l'aide de résultats de géométrie rigide tirés de son approche décrite dans la partie 3 ci-dessous.

## 2. La conjecture d'Abhyankar

Pour la droite affine $X$ sur un corps algébriquement clos $k$ de caractéristique $p > 0$, cette conjecture affirme que tout groupe fini $G$ engendré par ses $p$-sous-groupes de Sylow est le groupe de Galois d'un revêtement étale galoisien connexe de $X$. Raynaud prouve ceci dans [27], à nouveau par des techniques de géométrie rigide tirées de son travail décrit dans la partie 3. Le problème lui avait été proposé par Serre, qui avait traité le cas où $G$ est résoluble. Peu après, Harbater [10], à partir du travail de Raynaud, prouve le cas général de la conjecture d'Abhyankar (pour les courbes affines lisses sur $k$).

## 3. Un nouveau regard sur la géométrie rigide

Les espaces analytiques rigides sur des corps complets non archimédiens $K$ ont été définis et étudiés par Tate en 1961. Ils ont fait l'objet de travaux de Kiehl quelques années plus tard. Vers la fin des années 60, Raynaud introduit une nouvelle façon de concevoir ces espaces, au moyen d'une catégorie de modèles formels, où certains éclatements, appelés « admissibles », sont inversés. Un exemple typique est sa construction de la *fibre générique* d'un schéma formel (plat, de présentation finie) sur l'anneau des entiers de $K$. Le dictionnaire qu'il établit entre géométrie formelle et géométrie rigide lui permet notamment de retrouver les résultats de Tate et de Kiehl par une simple application de techniques des EGA [7, 6]. Il l'utilisera dans [33] pour construire des uniformisations rigides des variétés abéliennes sur un corps de valuation discrète complet $K$ ayant une réduction semi-abélienne sur l'anneau des entiers de $K$ (généralisant la construction de Tate de la *courbe de Tate*), et, plus tard, pour des généralisations de cette construction aux 1-motifs sur $K$ au sens de Deligne [16]. Ce point de vue, qui joue un rôle crucial ici, ainsi que dans les parties 1 et 2, a été extrêmement fécond, par exemple en cohomologie cristalline (théorie de cohomologie rigide de Berthelot) et en théorie de Hodge $p$-adique (théorème de Faltings de presque pureté et applications).

1. La conjecture de Manin-Mumford concernait le cas d'une courbe plongée dans sa jacobienne.

# 4. Platitude

Grothendieck a montré l'importance de la platitude en géométrie algébrique : les bonnes familles de variétés algébriques sont celles qui correspondent à un morphisme plat $f$ entre schémas. De tels morphismes $f$, souvent assujettis à être en outre localement de présentation finie, font l'objet d'une étude systématique dans EGA IV [7], laquelle ne suffisait toutefois pas pour les fondements de la nouvelle approche de Raynaud à la géométrie rigide. Dans un long article en collaboration avec Gruson [34], Raynaud prouve que, si $f : X \to S$ est un morphisme de présentation finie, avec $S$ quasi-compact et quasi-séparé, il existe un éclatement $g : S' \to S$ tel que le transformé strict $f' : X' \to S'$ de $f$ soit plat (et que si $f$ est plat au-dessus d'un ouvert $U$ de $S$, on peut imposer à $g$ d'être un isomorphisme au-dessus de $U$). Ce *théorème de platification*, qui est au cœur de la théorie de Raynaud de la géométrie rigide, a eu beaucoup d'autres applications (c'est d'ailleurs l'article de Raynaud le plus souvent cité).

# 5. Foncteur de Picard et modèles de Néron

L'essentiel de ce travail a été réalisé dans les années soixante. Il reflète l'intérêt que Raynaud manifestait pour les variétés abéliennes depuis l'École, et l'influence de Grothendieck, qui, entre autres, lui avait proposé de traduire la construction de Néron des modèles de Néron dans le langage des schémas. Vers la fin des années cinquante, Grothendieck avait établi la représentabilité (par un schéma) du foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{X/S}$ pour tout morphisme $X \to S$ qui est projectif, plat, et à fibres géométriques intègres. Dans [31] Raynaud étudie le cas où $S$ est un trait (spectre d'un anneau de valuation discrète), mais où les fibres géométriques ne sont plus supposées intègres. En particulier, pour une courbe propre et plate $X/S$, de fibre générique lisse et géométriquement irréductible, il donne des conditions pratiques assurant que $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est la composante neutre du modèle de Néron $A$ de la jacobienne de la fibre générique de $X$. Il donne aussi une description combinatoire du groupe des composantes connexes de la fibre spéciale de $A$ en termes des composantes irréductibles de la fibre spéciale de $X$. Ces résultats ont eu d'importantes applications : ils jouent un rôle essentiel dans l'article de Deligne et Mumford [2]; ils interviendront plus tard dans l'analyse de l'arithmétique de la courbe modulaire $X_0(N)$ dans des travaux de Deligne-Mazur-Rapoport [2], et de Ribet (dans sa démonstration du fait que la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil implique Fermat [36]). On trouve une exposition détaillée de ces résultats, ainsi que du matériel pédagogique fort utile, dans le beau livre de Bosch, Lütkebohmert et Raynaud [1].

# 6. Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$

Raynaud a apporté plusieurs contributions à la théorie des schémas en groupes : dans SGA 3 (Exp. XV, XVI, XVII) [38], et dans sa thèse [23], mais certainement la plus connue est son article [28] sur les schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$, c'est-à-dire les schémas en groupes commutatifs, finis et plats annulés par un nombre premier $p$. Soit $R$ un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de caractéristique mixte $(0, p)$, d'indice de ramification absolue $e$, de corps des fractions $K$. Soient $\overline{K}$ une clôture algébrique de $K$ et $I = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe d'inertie. Les deux principaux résultats de Raynaud dans [28] sont les suivants :

(a) pour $e \leqslant p-1$, si $G$ est un schéma en groupes de type $(p, \ldots, p)$ sur $R$, alors tout quotient de Jordan-Hölder $H$ de $G$ est un schéma en espaces vectoriels sur un corps $\mathbf{F}_{p^r}$, l'inertie $I$ agit de façon modérée sur le $\mathbf{F}_{p^r}$-espace vectoriel $H(\overline{K})$, par homothéties via un caractère $\mathbf{F}^*_{p^r} \to \mathbf{F}^*_{p^r}$, produit de caractères fondamentaux d'exposants $\leqslant e$. Ceci prouve une conjecture de Serre;

(b) si $G$ est un groupe $p$-divisible sur $R$, de hauteur $h$ et de dimension $d$, de module de Tate $T = T_p(G_K)$, alors $\Lambda^h T = \mathbf{Z}_p(d)$, où $\mathbf{Z}_p(d) = T_p((\mu_{p^\infty})_K)^{\otimes d}$.

Ces résultats, qui sont indépendants, ont été très féconds. Par exemple, (b) a été utilisé par Faltings [8, 9] dans sa démonstration de la conjecture de Mordell pour borner la hauteur modulaire dans une classe d'isogénie de variétés abéliennes (Ray-

2. En particulier, pour la courbe modulaire $X_0(p)$, $p \geqslant 5$, le groupe des composantes connexes de la fibre spéciale en $p$ du modèle de Néron de la jacobienne de $X_0(p)_{\mathbf{Q}}$ est, sur une clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$, un groupe cyclique d'ordre le numérateur de $(p-1)/12$ [14, Appendix].

naud a donné des raffinements effectifs dans le séminaire Szpiro [26]).

## 7. Théorie de Cartier-Dieudonné et cohomologie cristalline

Dans sa démonstration du résultat (b) de la partie 6, Raynaud utilise la théorie de Cartier des groupes formels. Il y revient – ainsi qu'au foncteur de Picard – dans [15], où, pour $R$ comme dans la partie 6 [3], et $X/R$ propre et lisse, il fait une étude systématique du $R$-schéma en groupes propre $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/R}$. Cela l'amènera à s'intéresser à la cohomologie cristalline et au complexe de de Rham-Witt des schémas propres et lisses sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Depuis la fin des années soixante-dix, on savait que le terme initial de la suite spectrale dite *suite spectrale des pentes* associée à ce complexe fournit, modulo $p$-torsion, des groupes $p$-divisibles, mais la structure de la $p$-torsion du terme initial restait mystérieuse. Nous l'explicitons dans [11] en termes de certains modules gradués sur un anneau gradué qu'on appelle maintenant *l'anneau de Raynaud*, une extension du classique anneau de Cartier-Dieudonné. Raynaud se vantait souvent, par jeu, de ne pas comprendre les suites spectrales. Il avait cependant découvert la propriété la plus profonde de la suite spectrale des pentes (et de sa partenaire, la *suite spectrale conjuguée*), qu'il avait suggéré d'appeler la *survie du cœur*. En dépit de son nom romantique, cette propriété est toutefois trop technique pour pouvoir être décrite ici. La théorie fut ensuite considérablement développée par Ekedahl [3, 4, 5] [4]. D'autres applications géométriques et arithmétiques furent obtenues plus tard par Joshi et Milne-Ramachandran.

## 8. Géométrie des courbes et des surfaces

Dans [20] Raynaud donne le premier exemple d'une surface propre et lisse $X$ sur un corps algébriquement clos $k$ de caractéristique $p > 0$ possédant un faisceau inversible ample $\mathscr{L}$ tel que $H^1(X, \mathscr{L}^{-1}) \neq 0$, montrant ainsi que le théorème d'annulation de Kodaira ne s'étend pas à la caractéristique $> 0$ [5]. Sa construction est basée sur certaines courbes étudiées par Tango. Des variantes relatives ont ensuite été développées en collaboration avec Szpiro, et de nouveaux exemples ont été donnés. Ces courbes sont appelées aujourd'hui *courbes de Tango-Raynaud*.

Vers le milieu des années soixante-dix, Raynaud a étudié les surfaces fibrées en courbes elliptiques ou quasi-elliptiques. Son travail est resté inédit, mais des notes ont circulé. Il intervient de manière essentielle dans les articles en collaboration avec Liu et Lorenzini [12, 13], où est prouvé le résultat suivant. Soient $X$ une surface propre, lisse, et géométriquement connexe sur un corps fini $k$, $f : X \to V$ un morphisme propre et plat, à fibre générique lisse et géométriquement connexe, où $V$ est une $k$-courbe propre, lisse, et géométriquement connexe. Alors :

(a) (sous une certaine hypothèse nécessaire sur des invariants locaux numériques de $f$) les conjectures d'Artin-Tate et de Birch et Swinnerton-Dyer sont équivalentes ;

(b) si, pour un nombre premier $\ell$, la partie de $\ell$-torsion du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ est finie, alors l'ordre de $\mathrm{Br}(X)$ est un carré. Cette dernière assertion résout une question longtemps ouverte.

Soit maintenant $X$ une courbe propre, lisse et connexe, de genre $g \geqslant 1$, sur un corps algébriquement clos $k$ de caractéristique $p > 0$, et notons $F : X \to X^{(p)}$ le morphisme de Frobenius relatif. Le faisceau $B \subset F_* \Omega^1_{X/k}$ des différentielles localement exactes est un fibré vectoriel de rang $p-1$ et pente $g-1$ sur $X^{(p)}$, qui était apparu dans la définition des courbes de Tango-Raynaud. Raynaud [29] montre que $B$ admet un *diviseur thêta* $D \subset J^{(p)}$ (où $J$ est la jacobienne de $X$), paramétrant les faisceaux inversibles $L$ de degré zéro tels que $h^0(B \otimes L) \neq 0$. Ce diviseur $D$ s'est avéré être un ingrédient essentiel dans la démonstration par Tamagawa [40] du fait que, sur une clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$, il n'existe qu'un nombre fini de classes, à isomorphisme près, de courbes lisses, hyperboliques, dont le groupe fondamental modéré est isomorphe à un groupe profini donné.

## 9. Séminaire Bourbaki

Raynaud a fait plusieurs exposés au séminaire Bourbaki, sur une large palette de sujets. Voir les références à la fin. Je terminerai sur une note plus personnelle. Raynaud adorait la nature. Son bureau à Orsay donnait sur les bois. Il y voyait parfois un

3. Supposé de plus complet et de corps résiduel algébriquement clos.
4. Voir [35, p. 20-72] pour un survol.
5. Mumford avait précédemment donné un exemple avec une surface normale singulière.

écureuil roux bondir de branche en branche. Il gardait une amaryllis sur sa table de travail. Il avait, dans sa jeunesse, fait des ascensions avec Michèle dans les Alpes, principalement dans le massif de l'Oisans. Pendant près de quarante ans, ils étaient allés, chaque année, skier à Val d'Isère. À partir de la fin des années soixante, ils faisaient régulièrement de l'escalade avec Serre dans les rochers de Fontainebleau. Michel et Michèle jouaient au tennis trois fois par semaine. Il était resté en assez bonne santé, mais un jour, en novembre 2017, il se sentit tout à coup désorienté, près de chez lui, à Palaiseau. Une IRM révéla une tumeur au cerveau, dont il fut opéré avec succès peu avant Noël. Pendant quelques semaines, il semblait avoir récupéré. Cependant, en février, son état se dégradait rapidement. Il dut être hospitalisé, sombra dans le coma, et mourut le 10 mars.

Jusqu'à ses derniers moments de conscience, sa vivacité intellectuelle et son sens aigu de l'humour sont restés intacts. Quand je lui ai rendu visite à l'hôpital, nous avons plaisanté à nouveau à propos des suites spectrales, dont il m'assurait qu'elles avaient fort heureusement disparu pendant l'opération, ainsi que des couronnes rigides, qu'il affectionnait, particulièrement celles d'épaisseur nulle, qui avaient joué un rôle clé dans sa démonstration de la conjecture d'Abhyankar.

## Références


[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud. *Néron models*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **21**. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] P. Deligne et D. Mumford. « The irreducibility of the space of curves of given genus ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **36** (1969), p. 75-109.

[3] T. Ekedahl. *Diagonal complexes and F-gauge structures*. Travaux en cours. Hermann, Paris, 1986.

[4] T. Ekedahl. « On the multiplicative properties of the de Rham-Witt complex. I ». *Arkiv för matematik* **22**, nº 2 (1984), p. 185-239.

[5] T. Ekedahl. « On the multiplicative properties of the de Rham-witt complex. II ». *Arkiv för Matematik* **23**, nº 1 (1985), p. 53-102.

[6] *Éléments de Géométrie Algébrique*. Par A. Grothendieck (rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné). Grundlehren der mathematische Wissenschaften **166**. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[7] « Éléments de Géométrie Algébrique ». Par A. Grothendieck (rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné). *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960-1967).

[8] G. Faltings. « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern ». *Inventiones mathematicae* **73**, nº 3 (1983), p. 349-366.

[9] G. Faltings. « Erratum: "Finiteness theorems for abelian varieties over number fields" ». *Inventiones Mathematicae* **75**, nº 2 (1984), p. 381.

[10] D. Harbater. « Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves ». *Inventiones mathematicae* **117**, nº 1 (1994), p. 1-25.

[11] L. Illusie et M. Raynaud. « Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **57** (1983), p. 73-212.

[12] Q. Liu, D. Lorenzini et M. Raynaud. « Néron models, Lie algebras, and reduction of curves of genus one ». *Inventiones mathematicae* **157**, nº 3 (2004), p. 455-518.

[13] Q. Liu, D. Lorenzini et M. Raynaud. « On the Brauer group of a surface ». *Inventiones mathematicae* **159**, nº 3 (2005), p. 673-676.

[14] B. Mazur. « Modular curves and the Eisenstein ideal ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **47** (1977), p. 33-186.

[15] M. Raynaud. « "*p*-torsion" du schéma de Picard ». *Astérisque* **64** (1979). Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (juillet 1978) II, p. 87-148.

[16] M. Raynaud. « 1-motifs et monodromie géométrique ». *Astérisque* **223** (1994). Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), p. 295-319.

[17] M. Raynaud. « Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes ». In : *Séminaire Bourbaki (1964/1965), Exposé 286. Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. Advances and Studies in Pure Mathematics **3**. North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 12-30.

[18] M. Raynaud. « Compactification du module des courbes ». In : *Séminaire Bourbaki (1970/71), Exposé 385*. Lecture Notes in Mathematics **244**. Springer-Verlag, Berlin, 1971, p. 47-61.