J. BRIANCON
A. GALLIGO
M. GRANGER

Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 1 (1980)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1980_2_1__1_0>

I N T R O D U C T I O N

L'objet de ce travail est de comparer les définitions d'équisingularité introduites par différents auteurs dans le cas des déformations plates de germes de courbes réduites. Nous faisons une synthèse de ce qui nous est connu sur le sujet et présentons un certain nombre d'exemples et contre-exemples.

Le problème de l'équisingularité a d'abord été posé et étudié par O. ZARISKI. Nous nous sommes inspiré des travaux dans cette direction de F. PHAM et B. TEISSIER [P-T], J. STUTZ [St], B. TEISSIER [T_2] et surtout de R.O. BUCHWEISS et G.M. GREUEL [B-G]. C'est ce dernier article qui permet de parler du nombre μ de Milnor et de " μ constant" pour une famille de courbes réduites sans rester dans le cadre limité des courbes intersections complètes et donne le résultat topologique fondamental.

RAPPEL SUR L'ÉQUISINGULARITÉ DES GERMES DE COURBES PLANES.

Dans [Z_1], O. ZARISKI définit la (a)-équivalence de deux germes de courbes planes, par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaires à la désingularisation Soient C et D deux germes de courbes planes de branches respectives $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$ et $\delta_1,\ldots \delta_r$. Une bijection π entre les branches est dite tangentiellement stable si : deux branches quelconques sont tangentes si et seulement si leurs images par π sont tangentes. M induit alors une bijection entre les composantes tangentielles de C et D.

C et D sont (a)-équivalentes s'il existe une bijection π tangentiellement stable entre leurs branches telle que :

- les multiplicités d'une branche γ_i et de son image $\pi(\gamma_i)$ sont égales,
- π induit une (a)-équivalence entre les transformées propres des composantes tangentielles de C et D dans l'éclatement de l'origine.

Dans [Z_3] , O.ZARISKI démontre, grâce à la théorie de la saturation d'une algèbre analytique locale, que deux courbes planes irreductibles sont (a)-équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes paires caractéristiques de Puiseux ; puis dans [Z_4] il démontre que deux courbes planes sont (a)-équivalentes par π si et seulement si pour tout i, γ_i et $\pi(\gamma_i)$ ont les mêmes paires de Puiseux et pour tout (i,j), les multiplicités d'intersection $(\gamma_i;\gamma_j)$ et $(\pi(\gamma_i);\pi(\gamma_j))$ sont égales.

D'après des résultats classiques ([Br] , [Z_5]) il en résulte alors que deux germes de courbes planes C et D sont (a)-équivalentes si et seulement si elles ont même type topologique : c'est-à-dire s'il existe deux voisinages ouverts de l'origine U et V dans $\mathbb{C}^2$ et un homéomorphisme h de U sur V envoyant C sur D.

Une déformation à base lisse de germes de courbe plane est dite équisingulière si deux fibres quelconques de la déformation sont (a)-équivalentes ou topologiquement équivalentes.

Dans [Z_1] , O. ZARISKI démontre le critère discriminant : une déformation est équisingulière si et seulement si il existe une projection "permise" (voir [Z_7]) pour laquelle le discriminant de la projection est équimultiple.

Dans [Z_6] il démontre aussi qu'une déformation est équisingulière si et seulement si elle vérifie les conditions (a) et (b) de Whitney, voir aussi B. Teissier [T_4] .

Dans [Le_2] et [L-R] Lê DŨNG TRÁNG et C.P. RAMANUJAM montrent par des arguments topologiques qu'une déformation de courbe plane dont la fibre a un nombre de Milnor constant est à type topologique constant, donc équisingulière.

Il faut attendre [T_5] pour que B. TEISSIER donne une démonstration algèbrique de ce résultat.

Dans [T_2] B. TEISSIER démontre l'équivalence de l'équisingularité et d'une condition de résolution simultanée des singularités.

En résumé toutes les définitions "raisonnables" d'équisingularité sont équivalentes dans le cas des germes de courbes planes, (citons [T_5] ou [T_2] pour des exposés plus détaillés).

DIFFÉRENTES NOTIONS D'ÉQUISINGULARITÉ POUR LES GERMES DE COURBES GAUCHES.

Par souci de clarté, nous nous sommes volontairement limités à l'étude des familles de courbes paramètrées par un espace lisse de dimension un, bien que tous les résultats que nous exposons semblent se généraliser facilement au cas des familles paramétrées par un espace lisse de dimension quelconque.

Nous travaillons donc dans la situation suivante : $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ est un germe de surface tel que la restriction p à X de la projection canonique de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ sur $U = \mathbb{C} \times \{0\}$ soit plate, $X_o = p^{-1}(0)$ soit un germe de courbe réduite de $\mathbb{C}^N$, et le lieu singulier relatif (à p) de X soit U. On peut alors introduire les différentes notions d'équisingularité suivantes :

(1) TRIVIALITÉ TOPOLOGIQUE : la paire (B_ε, X_u) reste homéomorphe à (B_ε, X_o) au voisinage de $u = 0$, lorsque B_ε désigne la boule de $\mathbb{C}^N$ de centre 0 et de rayon ε assez petit, et $X_u = p^{-1}(u) \cap B_\varepsilon$.

(2) μ CONSTANT : le nombre de Milnor $\mu(X_u)$ de la fibre X_u est constant au voisinage de 0.

(3) LES CONDITIONS DE WHITNEY : le couple $(X-U, U)$ vérifie les conditions a) et b) de Whitney au voisinage de 0.

(4) L'ÉQUISATURATION : les algèbres saturées $\tilde{\mathcal{O}}_{X_u}$ sont isomorphes lorsque u varie dans un voisinage de 0 ($\mathcal{O}_{X_u}$ désignant l'algèbre de X_u en ce point spécial).

Introduisons encore, suivant J. STUTZ [St] :

(3') dim $C_4(X) = 2$: où $C_4(X)$ est le cône ensemble des limites en 0 des vecteurs tangents à la partie lisse de X.

<u>(4') dim $C_4(X) = 2$ et dim $C_5(X) = 3$</u> : où $C_5(X)$ est le cône ensemble des limites en 0 des vecteurs sécants à X.

Notons aussi $\delta(X_u) = \dim_{\mathbb{C}} (\overline{\mathcal{O}}_{X_u}/\mathcal{O}_{X_u})$ (où $\overline{\mathcal{O}}_{X_u}$ est l'algèbre normalisée de $\mathcal{O}_{X_u}$) ; $r(X_u)$ le nombre de composantes irréductibles du germe X_u ; $m(X_u)$ sa multiplicité et, si X'_u désigne la projection plane générique de X_u, $\ell(X_u) = \delta(X'_u) - \delta(X_u)$.

Enfin, suivant B. TEISSIER [T_2] , nous introduisons aussi :

<u>(2''') résolution simultanée faible.</u>

<u>(3''') résolution simultanée forte.</u>

On a le diagramme suivant d'implications :

(1) trivialité topologique

$\Updownarrow$ a

(2''') résolution simultanée faible $\overset{c}{\Leftrightarrow}$ (2) μconstant $\overset{b}{\Leftrightarrow}$ (2'') $\delta(X_u)$ et $r(X_u)$ constants au voisinage de 0

$\Uparrow$ d

(3''') résolution simultanée forte $\overset{g}{\Leftrightarrow}$ (3) conditions de Whitney $\overset{e}{\Leftrightarrow}$ (3') $\dim C_4(X)=2$ $\overset{f}{\Leftrightarrow}$ (3'') $\mu(X_u)$ et $m(X_u)$ constants au voisinage de 0

$\Nearrow$ h

(4) équisaturation $\overset{i}{\Leftrightarrow}$ (4') $\dim C_4(X)=2$ et $\dim C_5(X)=3$ $\overset{j}{\Leftrightarrow}$ (4'') $\mu(X_u)$ et $\ell(X_u)$ sont constants au voisinage de 0

a, b et c : R.O. BUCHWEISS et G.M. GREUEL

d : THOM MATHER (et a)

e et i : J. STUTZ

g : B. TEISSIER

f, h , j : démontrés ici.

QUELQUES ÉLÉMENTS DE COMPARAISON.

Dans le chapitre V nous donnons divers exemples illustrant des différences importantes avec l'équisingularité des courbes planes.

Notons que :

1) Les réciproques de d) et h) sont toutes les deux fausses :

$\neg$d : exemple V.1. de J.P.G. HENRY avec X_0 intersection complète.
exemple V.2. avec X_0 irréductible, Gorenstein.

$\neg$h : exemple V.3. avec X_0 intersection complète irréductible de semi-groupe $\Gamma(X_u)$ constant.

2) Le critère discriminant de Zariski se généralise au cas des intersections complètes où il équivaut aux conditions de Whitney (théorème III.5 et Remarque III.6). Par contre, nous donnons un exemple (V.5) d'une famille de courbes gauches pour laquelle les conditions de Whitney sont satisfaites mais où la multiplicité du discriminant générique varie.

3) Dans la déformation semi-universelle d'un germe de courbe plane la strate d'équisingularité est lisse. Ce résultat est du à J. WAHL qui utilise la définition de l'équisingularité à l'aide de la (a)-équivalence ([Wa]).
Dans le cas des germes de courbes irréductibles une autre démonstration est donnée par B. TEISSIER dans [T_3] qui déduit ce résultat de la lissité de la "strate à semi groupe constant".
Nous donnons un exemple de germe de courbe gauche (V.6) dont la déformation semi-universelle a une "strate à μ constant" singulière.

4) Dans le cas des germes de courbes planes les notions d'équivalence et d'équisingularité sont liées par la propriété suivante :
Etant donnés deux germes de courbes planes C et D topologiquement équivalents, il existe une déformation à un paramètre équisingulière contenant deux fibres isomorphes respectivement à C et D.

Dans le cas des germes de courbes gauches nous ne disposons pas d'une définition satisfaisante de l'équivalence de deux germes.
Ainsi deux germes de courbes dans $\mathbb{C}^3$ sont topologiquement équivalents si et seulement si ils ont le même nombre de branches. Cela ne peut suffire en général pour les joindre par une famille équisingulière en aucun des sens étudiés ici.

5) Signalons qu'à notre connaissance la question suivante n'est pas résolue : une déformation plate à μ constant d'un germe de courbe irréductible intersection complète est elle à semi-groupe constant ? ou au moins équimultiple ?

Pour terminer cette introduction attirons l'attention du lecteur sur deux points particuliers qui nous semblent originaux :
D'une part le fait que le nombre de composantes globales dans la boule B_ε de la fibre générique X_u d'une déformation plate de la courbe X_0 soit égal au nombre de composantes du germe de surface X (théorème I.9).
D'autre part l'étude de l'invariant analytique $\ell(X_0)$ mesurant la différence entre la courbe X_0 et sa projection plane générique ainsi que la description des directions de projections planes non génériques de X_0.
Précisément nous interprétons $\ell(X_0) = \delta(X_0') - \delta(X_0)$ comme le nombre de points doubles de la projection plane générique d'une déformation lisse de X_0 et nous montrons que $\ell(X_u)$ est semi-continu (proposition IV.6 et corollaire IV.7). Nous montrons que l'ensemble des limites de vecteurs sécants à X_0 est la réunion d'un nombre fini de 2-plans (proposition IV.1) ; la projection plane π_H parallèlement à un N-2 plan H de la courbe X_0 est non générique si et seulement si H contient l'un non nul de ces vecteurs, ce qui équivaut au fait que :

$$\delta(\pi_H(X_0)) - \delta(X_0) > \ell(X_0)$$

ou éventuellement $\pi_H(X_0)$ non réduit.

INTRODUCTION

La matière de l'appendice provient en grande partie d'un manuscrit non publié de F. PHAM et B. TEISSIER décrivant la construction du saturé lipschitzien d'une algèbre analytique locale de dimension un (qui coïncide ici avec le saturé de Zariski) à partir de la suite de ses "exposants caractéristiques" dans le cas irréductible (théorème VI.1.6.) et dans le cas réductible que nous avons précisé (théorème VI.2.2., Remarque et lemme VI.3.6) . Remarquons que ces calculs sont analogues à certains calculs de O. ZARISKI dans [Z_4].

Nous utilisons cette description pour montrer que deux courbes ont même saturé si et seulement si leurs projections planes génériques ont même type topologique (théorème VI.0.2). C'est ce résultat qui nous permet justement au chapitre IV de définir la projection plane générique à équivalence topologique près et de montrer que l'équisaturation équivaut à l'équisingularité de la projection plane générique.

P L A N

CHAP. I : DÉFORMATIONS PLATES D'UN GERME DE COURBE RÉDUITE.

Soit X_o un germe de courbe <u>réduite</u> de $(\mathbb{C}^N,0)$ défini par l'idéal $I_o = (f_1,\ldots,f_k) \subset \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_N\}$ et soit X un germe de surface de $(\mathbb{C}^{N+1},0)$ défini par l'idéal I de $\mathbb{C}\{u,x_1,\ldots,x_N\}$ engendré par les éléments $(F_1,\ldots,F_k)$ avec, pour $i = 1,\ldots,k$, $F_i(0,x_1,\ldots,x_N) = f_i(x_1,\ldots,x_N)$.

Notons p la restriction à X de la projection canonique de $(\mathbb{C}^{N+1},0)$ sur le premier facteur $(\mathbb{C},0)$; lorsque p est plate, c'est à dire lorsque

$\mathcal{O}_X = \dfrac{\mathbb{C}\{u,x_1,\ldots,x_N\}}{I}$ est un $\mathbb{C}\{u\}$-module plat, nous dirons que X est une déformation plate à un paramètre de X_o.

<u>LEMME I.1.</u>: Si X est une déformation à un paramètre de la courbe réduite X_o, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est une déformation plate

(ii) X est de Cohen- Macaulay

(iii) X est de dimension pure 2.

<u>Preuve</u> :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : u est non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_X$, et, puisque X_o est réduite, il existe un paramètre, x_1 par exemple, non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_{X_o} = \mathcal{O}_X/u\mathcal{O}_X$. La suite (u,x_1) est donc régulière dans $\mathcal{O}_X$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $\dim(\mathcal{O}_X/u\,\mathcal{O}_X) = \dim \mathcal{O}_{X_o} = \dim \mathcal{O}_X - 1$, et, dans $\mathcal{O}_X$ de dimension